Journal of Baku Engineering University

BMU
BAKI MÜHƏNDİSLİK UNİVERSİTETİ

ISSN 2521-635X

Volume 7
Number 1

2023

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Journal is published twice a year
Number-1. June, Number-2. December

An International Journal

http://journal.beu.edu.az

CONTACT ADDRESS

Journal of Baku Engineering University
AZ0102, Khirdalan city, Hasan Aliyev str. 120, Absheron, Baku, Azerbaijan
Tel: 00 994 12 - 349 99 95 Fax: 00 994 12 349-99-90/91

e-mail: journal@beu.edu.az
web: http://journal.qu.edu.az
facebook: Journal Of Baku Engineering University

ISSN 2521-635X

ISSN 2521-635X

Journal of
Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Baku - AZERBAIJAN

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

2023. Volume 7, Number 1

CONTENTS

ПРИМЕНЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С.М. Багирова ____ 3

ОБ АСИМПТОТИКЕ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ ТИПА СОЛЯ

Г.И. Асланов, С.Е. Сулейманов ____ 10

OBTAINING THE FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATION FOR GENERATING FUNCTION OF A SEMI-MARKOVIAN RANDOM WALK WITH NEGATIVE DRIFT AND POSITIVE JUMPS

T. I. Nasirova, E. A. Ibayev ____ 18

ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

М.Я. Наджафова ____ 25

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ПОДВИЖНЫМ ПРАВЫМ КОНЦОМ ТРАЕКТОРИИ

А.А.Абдуллаев, К.В.Мансимов ____ 33

BIR SINIF IKINCI TƏRTIB XÜSUSI TÖRƏMƏLI OPERATOR-DIFERENSIAL TƏNLIKLƏRIN BÜTÜN FƏZADA HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

R.F. Hətəmova ____ 39

THE CLOUD SERVICE SECURITY ISSUE RISK EVALUATION: CASE OF AZURE AND MICROSOFT 365

Mekhiriban Fattakhova, Samur Ahmadov ____ 47

2023. Volume 7, Number 1 *Pages 3-9*

UOT: 517.957

ПРИМЕНЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С.М. БАГИРОВА

Азербайджанский Государственный Аграрный Университет

Bagirovasevindj@rambler.ru

РЕЗЮМЕ

В данной работе получены результаты о существования и единственности решении для операторно-дифференциального уравнения четвертого порядка одного класса граничной задачи в конечной области. Эти результаты получены при решении краевых задач в сепарабельном Гильбертовом пространстве H, где A-нормальный обратный оператор в H, спектр, которого содержится в угловом секторе. Объясняется какие задачи называются регулярно разрешимыми. С помощью теорем доказаны, что оператор P_0 изоморфно отображает пространство $\overset{0}{W}{}_2^4((0,\pi):H)$ на пространство $L_2((0,\pi):H)$ и было получено, что поставленная задача регулярно разрешима в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: Гильбертово пространство, нормальный оператор, унитарный оператор, операторно-дифференциальные уравнения, граничные задачи.

HİLBERT FƏZASINDA SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN TƏTBİQİ

XÜLASƏ

Məqalədə dörd tərtibli operator diferensial tənlik üçün bir sinif sərhəd məsələsinin sonlu oblasta həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında nəticələr alınmışdır. Bu nəticələr separabel Hilbert fəzasında H sərhəd məsələlərini həll etməklə əldə edilmişdir, burada A spektri künc sektorunda olan H-də normal tərs operatordur. Hansı problemlərin mütəmadi olaraq həll edildiyi izah edilir. Teoremdən istifadə edərək sübut edirik ki, P0 operatoru $\overset{0}{W}{}_2^4((0,\pi):H)$ fəzasını izomorf şəkildə $L_2((0,\pi):H)$ fəzasına çəkir və məlum olur ki, bu məsələ müntəzəm olaraq separabel Hilbert fəzasında həll olunur.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, normal operator, operator- diferensial tənliklər, sərhəd məsələsi, unitar operator.

APPLİCATİON OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM İN A HİLBERT SPACE

ABSTRACT

İn this paper we obtain results on the existence and uniqueness solution for a fourth- order operator-differential equation of a class of a boundry value problem in a finite domain. These results are obtained by solving boundary value problems in a separable Hilbert space H, where A is a normal inverse operator in H, whose spectrum is contained in the angular sector. Explains what problems are called regularly solvable. Using theorems, we prove that the operator P0 maps the space $\overset{0}{W}{}_2^4((0,\pi):H)$ isomorphically onto the space $L_2((0,\pi):H)$ and it was found that the problem posed is regularly solvable in a separable Hilbert space.

Key words: The Hilbert space,normal,operator,unitary operator,operator-differential equations, boundary value problems.

Поставленная краевая задача решается в сепарабельном Гильбертовом пространстве H, где A-нормальный обратный оператор в H, спектр, которого содержится в угловом секторе

$$S_\varepsilon = \{\lambda : |\arg\lambda| \le \varepsilon\}, 0 \le \varepsilon < \pi/4$$

Тогда оператор A можно представить в виде *A=VC;* где *C* - самосопряженный положительный оператор в *H*, а *V* унитарный оператор в *H*.

Область определение оператора $C^{\gamma}(\gamma \geq 0$ становится гильбертовом пространством H_{γ} относительно скалярного произведения $(x,y)_{\gamma} = (C^{\gamma}x, C^{\gamma}y)$. При $\gamma = 0, H_0 = H$. Пусть $L_2((0,\pi): H)$ есть гильбертово пространство всех *H* вектор-функций *f(t)* определенные в *(0, π)* почти всюду, со значениями в, причем

$$\|f\|_{L_2((0,\pi):H)} = \left(\int_0^{\pi} \|f(t)\|^2 dt\right)^{1/2} < +\infty$$

Далее выводим следующие гильбертовым пространства [1]

$\overset{0}{W}{}_2^{4}((0,\pi): H = \{u: u^4 \in L_2(0,\pi): H, C^4 u \in L_2((0,\pi): H)\}$

и

$\overset{0}{W}{}_2^{4}((0,\pi): H = \{u: u \in W_2^4\big((0,\pi): H\big) u(0) = 0, u(\pi) = u^n(\pi) = 0\}$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^4((0,\pi):H} = \left(\left\|u^{(4)}\right\|^2_{L_2((0,\pi):H)} + \|C_u^4\|^2_{L_2((0,\pi):H)}\right)^{1/2}$$

Рассмотрим в *H* краевую задачу

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = u^{(4)}(t) + A_u^4(t) + \sum_{j=0}^{4} A_{4-j}\, u^j(t) = f(t), t \in (0,\pi) \tag{1}$$

$$u(0) = u^n(0) = 0, u(\pi) = u^n(\pi) = 0 \tag{2}$$

Определение. Если при любом $f \in L_2\big((0,\pi)H\big)$ существует вектор-функция

$u(t) \in W_2^4(0,\pi)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в $(0,\pi)$ краевым условием (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t\to+0}\|u(t)\|_{7/2} = 0, \lim_{t\to+0}\|u^n(t)\|_{3/2} = 0, \lim_{t\to+0}\|u(t)\|_{7/2} = 0, \lim_{t\to+0}\|u^n(t)\|_{3/2} = 0$$

и оценку $\|u\|_{\overset{0}{W}{}_2^{4}((0,\pi):H)} \leq cost\|f\|_{L_2((0,\pi):H)}$ то задача (1), (2) называется регулярно разрешимым.

Отметим, что аналогичные задачи при *A* -положительно определённый самосопряженный оператор, которые исследованы в работе [2], при *n*=2 в работах [3-6]

В данной работе мы найдём условия на коэффициенты уравнения (1), которые обеспечивают регулярную разрешимость задачи (1), (2)

В пространстве $\overset{0}{W}{}_2^{4}((0,\pi): H)$ определим оператор

$P_0 u = P_0\left(\frac{d}{dt}\right)u = u^4(t) + A^4 u(t), u \in \overset{0}{W}{}_2^{4}((0,\pi): H)$

Имеет место

Теорема1 Оператор P_0 изоморфно отображает пространство

$\overset{0}{W}{}_2^4((0,\pi):H)$ на пространство $L_2\big((0,\pi):H\big)$

Доказательство. Пусть $P_0u=0$, т.е $u\in \overset{0}{W}{}_2^4((0,\pi):H)$ и $u^4(t)+A^4u(t)=0$. Так, как система $\left\{\Psi_k(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kt\right\}_{k=1}^{\infty}$ есть ортонормированный базис в $L_2(0,\pi)$, то

$$u(t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\,\Psi_k(t),$$

где $u_k\in H$. Очевидно, что $u(0)=u^n(0)=u(\pi)=u^n(\pi)=0$. Тогда получаем, что $(kE^4+A^4)u_k=0$, так как $\sigma(A)\subset S_\varepsilon$ т σ о $k^4\notin\sigma(A^4)$ поэтому оператор $(k^4E++A^4)^{-1}$ существует и ограничен. Тогда $u_k=0$ следовательно $u(t)=0$. Теперь покажем, что$J_mP_0=L_2((0,\pi):H)$, т.е уравнение$P_0u=f$ имеет решение при любом

$f\in L_2((0,\pi):H)$. Действительно, из уравнения $P_0u=u^{(4)}+A^4u(t)=f(t)$

получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^4\,\Psi_k(t)+u_k\Psi_k(t)+\sum_{k=1}^{\infty}f_k\,\Psi_k(t),$$

где

$$f_k=\int_0^{\pi}f(t)\,\Psi_k(t)dt, u_k=\int_0^{\pi}u(t)\,\Psi_k(t)dt, k=1,2\,....$$

Отсюда имеем, что

$$(k^4E+A^4)u_k=f_k, k=1,2\,...$$

или

$$u_k=(k^4E+A^4)^{-1}=f_k, k=1,2\,...$$

Таким образом

$$u(t)=\sum_{k=1}^{\infty}(k^4E+A^4)^{-1}\,f_k,\Psi_k(t)$$

Покажем, $u(t)\in\overset{0}{W}{}_2^4((0,\pi):H)$ по неравенстве Парсеваля имеем

$$\|u\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^4(0,\pi)H)}=\left\|u^{(4)}\right\|^2_{L_2(0,\pi)H)}+\|C^4u\|^2_{L_2(0,\pi)H)}=\sum_{k=1}^{\infty}\|k^4u_k\|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\|C^4u_k\|^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\|k^4(k^4E+A^4)^{-1}f_k\|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\|C^4(k^4E+A^4)^{-1}f_k\|^2$$

С другой стороны при любом к имеем

$$\|k^4(k^4E+A^4)^{-1}\|^2 = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |k^4(k^4+\lambda^4)^{-1}| \sup_{\substack{r>0\\|\varphi|\triangleleft\varepsilon}} \left|k^4\left(k^4r^4e^{ui\varphi}\right)^{-1}\right| =$$

$$= \sup_{\substack{r>0\\|\varphi|\triangleleft\varepsilon}} |k^4(k^4+r^4cos4\varphi+ir^4esin4\varphi)^{-1}| = \left\|A^{4-j}u^j\right\|^2_{L_2((0,\pi):H)}$$

$$= \left\|A^{4-j}\sum_{k=1}^{\infty}k^j(k^4E+A^4)^{-1}f_k\,\Psi_k(\,t)\right\|_{L_2((0,\pi):H)}$$

$$= \left\|\sum_{k=1}^{\infty}A^{4-j}k^j(k^4E+A^4)^{-1}f_k\,\Psi_k(\,t)\right\|_{L_2((0,\pi):H)}$$

$$\Psi_k(\,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\begin{cases}\sin kt, \text{при чётных к}\\ coskt, \text{при нечётных к}\end{cases}$$

$$\left\|A^{4-j}u^j\right\|^2_{L_2((0,\pi):H)} \le \sum_{k=1}^{\infty}\left\|A^{4-j}k^j(k^4E+A^4)^{-1}f_k\right\|^2 \le \sup_k \left\|A^{4-j}k^j(k^4E+A^4)^{-4}\right\|^2\cdot\|f\|^2_{L_{2(0,\pi)}}$$

С другой стороны из спектрального разложения A следует, что

$$\left\|A^{4-j}k^j(k^4E+A^4)^{-1}\right\| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} \left|\lambda^{4-j}k^j(k^4+\lambda^4)^{-1}\right| =$$

$$\sup_{r>0} \left|r^{r-j}k^j(r^8+k^8+2r^4k^4cos4\varepsilon)^{-1/2}\right| =$$

$$\sup_{r>0} \left|r^{r-j}k^j\left((r^4+k^4)^2-2r^4k^4(1-cos4\varepsilon)\right)^{-1/2}\right| \le$$

$$\sup_{r>0} \left|r^{r-j}k^j((r^{\varphi}+k^4)^2-4r^4k^4sin^2 2\varepsilon)^{-1/2}\right| \le$$

$$\sup_{r>0} \left|r^{4-j}k^j((r^4+k^4)^2-(r^4+k^4)^2sin^2 2\varepsilon)^{-1/2}\right| \le$$

$$\sup_{r>0} \left|r^{4-j}k^j\left((r^4+k^4)^{-1}-(1-sin^2 2\varepsilon)\right)^{-1/2}\right| \le$$

$$\sup_{r>0} \left|r^{4-j}k^j(r^4+k^4)^1\cdot cos^{-1}2\varepsilon\right| = d_{4,j}\cdot cos^{-1}2\varepsilon = cos^{-1}2\varepsilon\left(\frac{j}{4}\right)^{j/4}\left(\frac{4-j}{4}\right)^{\frac{4-j}{4}}$$

Следовательно, при$j=1,2,3$

$$\left\|A^{4-j}u(j)\right\|_{L_{2((0,\pi):H)}} \le cos^{-1}2\varepsilon\cdot d_{4.j}$$

Теорема доказана.

Имеет место следующая основная

Теорема 2. Пусть A нормальный обратимый оператор, спектр, которого содержится в угловом секторе

$$S_\varepsilon = \{\lambda\colon |arg\lambda| \le \varepsilon, 0 \le \varepsilon < \pi/2\}$$

Операторы $B_j = A_j A^{-j} (j = \overline{0,4})$ ограничены в H и имеет место неравенство

При $0 \leq \varepsilon \leq \pi/8$ выражение $cos\varphi\varepsilon < 0$. Поэтому

$$\|k^4(k^4E + A^4)^{-1}\| \leq \sup_{r>0} \left\|k^4(k^8 + r^8)^{-1/2}\right\| \leq 1$$

Пусть $\pi/8 < \varepsilon < \pi/4$. Тогда $cos\varphi\varepsilon < 0$. Поэтому по неравенству Коши получаем

$$\|k^4(k^4E + A^4)^{-1}\| \leq \sup_{r>0} \left\|k^4(k^8 + r^8 + (k^8 + r^8)cos4\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}\right\| =$$

$$= \sup_{r>0} \left\|k^4(k^8 + r^8)^{-1/2}\left(\sqrt{2}cos2\varepsilon\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}cos2\varepsilon}$$

Следовательно,

$$\sup_k \left\|k^4(k^4E + A^4)^{-1}\right\| \leq \begin{cases} 1, 0 \leq \varepsilon < \pi/8 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}cos2\varepsilon}, \dfrac{\pi}{8} \leq \varepsilon < \pi/2^{=c_4(\varepsilon)} \end{cases} \tag{3}$$

Аналогично получаем:

$$\|C^4(k^4E + A^4)^{-1}\| = \sup_{\substack{r>0 \\ |\varphi|>\varepsilon}} \|r^4(k^4 + r^4 + 2k^4r^4cos4\varphi)\| \leq$$

$$\leq \begin{cases} 1, 0 \leq \varepsilon < \pi/8 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}cos2\varepsilon}, \dfrac{\pi}{8} \leq \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}^{=c_4(\varepsilon)} \end{cases} \tag{4}$$

Учитывая неравенство (3) и (4) получаем, что

$$\|u\|^2_{W_2^4((0,\pi):)} \leq (c_0^2(\varepsilon)\|f\|^2_{L_{2((0,\pi):H)}}$$

Таким образом $u \epsilon W_2^4((0,\pi)\text{: H})$. Покажем, что $u \epsilon W_2^4((0,\pi)\text{: H})$.

Обозначим, через

$$u_N(t) = \sum_{k=1}^{N} u_k \Psi_{kt}$$

Очевидно, что $u_N(t) \epsilon W_2^4((0,\pi)\text{: H})\left(u_N''(0) = 0, u_N(\pi) = u_N''(\pi) = 0\right)$

Так как

$$\|u_N(t) - u(t)\|^2_{W_2^4((0,\pi)\text{:H})} = \left\|\sum_{K=N+1}^{\infty} u_k\, \Psi_k\,(t)\right\|^2_{L_{2((0,\pi):H)}} + \left\|\sum_{K=N+1}^{\infty} u_k\, \Psi_{kt}\,(t)\right\|^2_{L_{2((0,\pi):H)}} =$$

$$= \left\|\sum_{K=N+1}^{\infty} C^4 u_k \Psi_k t\right\|^2_{L_{2((0,\pi):H)}} = \sum_{K=N+1}^{\infty} \|k^4 u_k\|^2 + \sum_{K=N+1}^{\infty} \|C^4 u_k\|^2 \to 0, N \to \infty$$

Тогда из теоремы о следах следует, что

$$\|u(0) - u_N(0)\|_{7/2} \leq const\|u_N(t) - u(t)\|$$

т.е.

$$\|u(0)\|_{7/2} \leq const\|u_N(t) - u(t)\| \to 0, N \to \infty$$

Следовательно $\|u(0)\| = 0$. Аналогично доказывается $u''(0) = 0$ $u(\pi) = 0$,

$u''(\pi) = 0$ Следовательно, $u(t)\epsilon W_2 \ \big((0,\pi): \mathrm{H}\big)$. таким образом уравнение $P_0u = f$ имеет решение при любом $f\epsilon L_2(R+: H)$. Так как

$$\|P_0u\|^2_{L_{2((0,\pi):H)}} = \|u^4 + A^4u\|^2_{L_2((0,\pi)H)} \leq 2\|u\|^2_{W_2^4((0,\pi)H)}$$

то из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что

$P_0: \overset{0}{W}{}_2^4 \big((0,\pi): H\big) \to L_2(R+: H)$ есть изоморфизм.

Теперь докажем теорему о промежуточных производных

Теорема 3. При любом $u\epsilon \overset{0}{W}{}_2^4 \big((0,\pi): H\big)$ имеют место неравенства

$$\left\|A^{4-j}u^{(j)}\right\|_{L_2((0,\pi)H)} \leq c_j(\varepsilon)\|P_0u\|_{L_{2((0,\pi):H)}}, j = \overline{0,4} \qquad (7)$$

где

$$c_0(\varepsilon) = c_4(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1, 0 \leq \varepsilon < \dfrac{\pi}{8}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}cos2\varepsilon}}, \dfrac{\pi}{8} \leq \varepsilon < \dfrac{\pi}{8}, \end{cases} \quad c_j(\varepsilon) = \frac{1}{cos2\varepsilon}\left(\frac{j}{4}\right)^{\frac{j}{4}}\left(\frac{4-j}{\varepsilon}\right)^{\frac{4-j}{4}}, j = 1,2,3$$

Доказательство. При $j = 0$ и $j = 4$ неравенство (7) вытекает из (3) и (4). Пусть $j = 1,2,3$. Так как оператор $P_0: \overset{0}{W}{}_2^4 (R_+: H) \to L_2(R_+: H)$ есть изоморфизм, то для любого $u\epsilon \overset{0}{W}{}_2^4 \big((0,\pi): H\big)$ существует $f\epsilon L_2((0,\pi): H)$ такой что $P_0u = f$, то $u = P_0^{-1}f$ Тогда $u_k = (k^4E + A^4)^{-1}f_k, k = 1,2, \ldots$

$$q = \sum_{j=0}^{4} c_j(\varepsilon)\left\|B_{4-j}\right\| < 1,$$

где числа $c_j(\varepsilon)$ $(j = \overline{0,4})$ определены из теоремы 2. Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима.

Доказательство. Напишем задачу (1), (2) в виде операторного уравнения

$P_0u + P_ju = f$, где

где $f\epsilon L_2\big((0,\pi): H\big)$ По теореме 1 P₀~' существует и ограничен. Обозначим через $P_0u = v$. Тогда получаем уравнение $v + P_1P_0^{-1}v = f$ в пространстве $L_2((0,\pi): H)$. Так как

для любого $v\epsilon L_2((0;\pi): H)$ имеем

$$\left\|P_1P_0^{-1}v\right\| = \|P_1u\|_{L_2((0,\pi):H)} \sum_{j=0}^{4}\left\|B_{4-j}\right\| \cdot \left\|A^{4-j}u^{(j)}\right\|_{L_2((0,\pi):H)} \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{4}\left\|B_{4-j}\right\| c_j(\varepsilon)\|P_0u\|_{L_2((0,\pi):H)} = \sum_{j=0}^{4}\left\|B_{4-j}\right\| c_j(\varepsilon)\|v\|_{L_2((0,\pi):H)}$$

Таким образом $\|P_1 P_0^{-1}\| \le q = \sum_{j=0}^{4} \|B_{4-j}\| c_j(\varepsilon) < 1$, Тогда оператор $E + P_1 P_0^{-1}$ обратим в $L_2\big((0,\pi): H\big)$ и $v = (E + P_1 P_0^{-1})^{-1} f$. Отсюда имеем

$u = P_0^{-1}(E + P_1 P_0^{-1})^{-1} f$ и $\|u\|_{W_2^4((0,\pi):\mathrm{H})} \le const \|f\|_{L_2((0,\pi):H)}$

Теорема доказана.

В результате было получено, что поставленная задача регулярно разрешима в сепарабельном гильбертовом пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mirzoev S.S., Zamanov H.I. On multiple completekess of eicen and associated vectors of a class operator pencils. // Prosedinq of the Institute of mathematics and mechanike, v.43, №2,2017, pp 188-196.
2. Мирзоев С.С., Заманов Г.И. О разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений. // Вестник Бакинского л. Унивеститета, 2015, №4, с. 13-17
3. Бабаева.С.Ф., Мирзоев С.С. Об оценках норм операторов промежуточных производных и их применения .//Матем. заметки, т.102, vl/2017
4. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения // Москва. Мир, 1971, 371 с.
5. Mirzoyev S.S. On the norus of operators of intermediate derivatives // Transactions of NAS of Azerb, ser.of phus-tech.and math. sciences, 2003, №1, pp. 157-164.
6. Мирзоев С.С., Салимов М.Ю. О полноте элементарных решений одного класса операторно-диффереciальных уравнений второго порядка. // Сибирский мат. жур. 2010, т.51, №4, с.815-828.
7. Багирова С.М. О построение функции грина для одного класса операторно-дифференциального уравнение четвёртого порядка XVII Конфранс 2013, с.13-15.
8. Багирова С.М. Об одной краевой задаче для дифференциального уравнения четвёртого порядка в гилбертовом пространстве // IV поиск. Международной журнал приложение Республики Казахстан. сер.естест. и тех.наук. 2014, №2(1), с.120-122.

2023. Volume 7, Number 1 Pages 10-17

УОТ 517.984

ОБ АСИМПТОТИКЕ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ ТИПА СОЛЯ

Г.И. АСЛАНОВ, С.Е. СУЛЕЙМАНОВ

Институт Математика и Механика

Министерства Науки и Просвещения Азербайджана

Агджабединский филиал Азербайджанского Государственного Педагогического Университета

aslanov.50@mail.ru, seymursuleymanov@mail.ru

РЕЗЮМЕ

Краевые задачи для эллиптических уравнений в неограниченных областях рассматривались во многих работах [1]-[2]. Наиболее полно изучен случай бесконечного цилиндра и периодическая по части переменных задача для эллиптического уравнения второго порядка [6]. В этих работах обычно не рассматривался вопрос о существовании и единственности решения и исследовались только свойства априори известного решения. В [5], [6] предполагалось, что решение имеет конечный интеграл Дирихле. Уравнение Лапласа на римановых многообразиях, структура которых более общая, чем слой рассматривалось в [7].

В работах [13]-[15] рассматривается краевая задача Неймана в области типа «бесконечный слой» для эллиптического уравнения второго порядка в дивергентной форме. Получены наиболее полные результаты о существовании и асимптотическом поведении обобщенных решений.

Отметим, что поведение решений в слое качественно отличается от поведения решения уравнения в цилиндре. В задаче Неймана, например, в цилиндре стабилизация решения к постоянной имеет место с экспоненциальной скоростью а в слое лишь со степенной.

Результаты работ [13],[14] в ряде случаев усиливают результаты [8],[9], [10] относящийся к решениям задач, периодических по части переменных. Так в [9] установлена лишь оценка скорости убывания решения на бесконечности, имеющего конечный интеграл энергии. В работе [13] получено асимптотическое представление решение при тех же самых ограничениях, что в [8]-[10].

В случае $n=2$ оценка $|u| \le c_\varepsilon |x|^{-1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ заменяется на более точную $|u| \le c_\varepsilon |x|^{-1}$ при выполнении условий Дини у коэффициентов уравнения.

В работе [15] рассматривается вопросы существования и асимптотического поведения обобщенного решения задачи Неймана для эллиптического уравнения в бесконечных областях типа слоя в специально построенных весовых пространствах.

Данная работа является продолжением и развитием работ [13],[14] в этом направлении. Здесь рассматриваются вопросы асимптотики обобщенного решения задачи Неймана для эллиптического уравнения в бесконечных областях типа слоя в весовых пространствах.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, краевые задачи, задача Неймана, область, обобщенные решение, уравнения Лапласа, асимптотика решения, единственность решение, весовые пространства, условия Дини.

ON ASYMPTOTOTICS OF GENERALIZED SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATIONS IN LAYER TYPE UNBOUNDED DOMAINS

ABSTRACT

Boundary value problems for elliptic equations in unbounded domains have been considered in many papers [1]-[2]. The case of an infinite cylinder and boundary value problems periodicin parts of free variables, for a second order elliptic equation has been completely studied [6]. In these papers, usually the existence and uniqueness of the solution

were not considered, and only the properties of a priori known solution were studied. In [5], [6] it was assumed that the solution has a finite Dirichlet integral. Laplace equation on in Riemann manifolds, whors structure is more general than a layer, was considered in [7].

The Neumann boundary value problem in an "infinite layer" type domain for second order elliptic equation in the divergent form was considered in [13]-[15]. The most complete results on the existence and asymptotic behavior of generalized solutions were obtained.

Note that behavior of solutions in a layer qualitatively differs from the behavior of solutions of the equation in a cylinder. In the Neumann problem, for example, in a cylinder stabilization of the solution to the constant holds with an exponential speed but in a layer only with a power speed.

The results of [13],[14] in some cases amplify the results of [8],[9], [10] related to the solutions of problems periodic in a part of variables. In [9], only the estimation of the decay rate of the solution at infinity, with finite integral of energy, was established. Asymptotic representation of the solution for the same constraints that in [8]-[10] was obtained in [13].

In the case, $n=2$ the estimation $|u| \le c_\varepsilon |x|^{-1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ is replaced by the more exact $|u| \le c_\varepsilon |x|^{-1}$ subject to the Dini conditions of the coefficients of the equation.

The existence and uniqueness of asymptotic behavior of the generalized solution of the Neumann problem for an elliptic equation in layer type infinite domains in specially constructed weighted spaces was considered in [15].

The present paper is the continuation and development of papers [13],[14] in this direction. Her we consider the asymptotics of the solution of the Neumann problem for an elliptic equation in layer type infinite domains in weighted spaces.

Keywords: elliptic equation, boundary value problem, Neumann problem, domain, generalized solution, Laplace equation, asymptotics of the solution, uniqueness of the solution, weighet space, Dini condition.

ZOLAQ TİPLİ QEYRİ-MƏHDUD OBLASLARDA İKİNCİ TƏRTİB ELLİPTİK TİP TƏNLİKLƏR ÜŞÜN SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNİN ÜMUMİLƏŞMİŞ HƏLLİNİN ASİMPTOTİKASI HAQQINDA

XÜLASƏ

Qeyri-məhdud oblastlarda elliptic tənliklər üçün sərhəd məsələləri çox sayda elmi işlərdə öyrənilmişdir [1]-[2].

Bu işlər işərisində ən çox sonsuz silindrik oblastlarda və sərbəst dəyişənlərdən bir qisminə görə periodik olduğu hallarda elliptic tənliklər üçün sərhəd məsələlərinə baxılmışdır. Adətən bu işlərdə məsələnin həllinin varlığı və yeganəliyi məsələsinə baxılmamış, amma həllin olduğu hallarda bu həllin bəzi xassələri öyrənilmişdir. [5],[6] işlərində sonlu Dirixle inteqralına malik həllinn xassələri araşdirilmışdır. [7] işində Laplas tənliyi üçün quruluşu zolaqdan daha mürəkkəb olan Riman çoxobrazlarında həllin xassələri öyrənilmişdir. [13]-[15] işlərində divergent formada ikinci tərtib elliptik tənliklər üçün "sonsuz zolaq" tipli oblastlarda Neyman məsələısinə baxılmış və məsələnin ümumiləşmiş həllinin varlığı və asimptotik xassələri öyrənilmişdir. Qeyd edək ki, məsələnin həllinin zolaqda xassələri, həllin silindrdə xassələrindən kəskin şəkildə fərqləqnir. Belə ki, Neyman məsələsinin silindrik oblastlarda həlli sabitə exsponensial sürətlə yaxınlaşdığı halda, zolaq tipli oblastda by yaxınlaşma qüvvət şəkilində sürətlə olur. [13],[14] işlərində alınmış nəticələr dəyişənlərlə nəzərən periodik olan hallar üçün [8]-[10] işlərində alınan nəticələri əhəmiyyətli dərəcədə gücləndirir.

$n=2$ olduğu halda $|u| \le c_\varepsilon |x|^{-1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ bərabərsizliyi daha dəqiq $|u| \le c_\varepsilon |x|^{-1}$ ilə əvəz olunmuşdur. Bu nəticə tənliyin əmsallarının Dini şərtini ödədiyi halda alınmışdır.

[15] işində ümümiləşmiş həllin varlığı və həllin asimptotik xassələri sonsuz oblastlarda təyin olunmuş çəkili fəzalarda öyrənilmişdir.

Məqalə [13]- [14] işlərində alınmış nəticələrin ümümiləşməsi və cəkili fəzalarda həllin asimptotik xassələrinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Acar sözlər: elliptik tənliklər, sərhəd məsələsi, Neyman məsələsi, oblast, ümümiləşmiş həll, Laplas tənliyi, həllin asimptotikası, həllin yeganəliyi, çəkili fəza, Dini şərti.

Пусть $\Pi = R^n \times \Omega$ где Ω ограниченная область в R^k с липщицеой границей $\partial\Omega$. Будем обозначать $z = (z_1, z_2, ..., z_m), m = n + k, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n) = (z_1, z_2, ..., z_n),$ $y = (y_1, y_2, ..., y_k) = (z_{n+1}, z_{n+2}, ..., z_{n+k}).$

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial z_i}\left(a_{ij}(z) \frac{\partial u}{\partial z_j} \right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial z_i}, \quad z \in \Pi \quad (1)$$

и краевую задачу для него

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = \sum_{ij=1}^{m} \frac{\partial}{\partial z_i} a_{ij}(z) \frac{\partial u}{\partial z_j} \cos(\vec{n}, z_j) = \sum_{j=n+1}^{m} f_j(z) \cos(\vec{n}, z_j), \quad z \in \partial\Omega, \quad (2)$$

через $\vec{n}$-обозначается единичный вектор нормали к $\partial\Omega$ в точках, где нормаль существует, $\vec{\nu}$ -называется конормалью границы $\partial\Omega$. Будем предполагать, что $a_{ij}(z)$ ограниченные измеримые в Π функции.

Для изучения задачи (1),(2) введем некоторые функциональные пространства. Функция $u(z) \in W_\alpha(\Pi)$, если

$$\int_{\Pi} (1 + |x|)^2 |\nabla_z u|^2 dz + \int_{\Pi} (1 + |x|)^\alpha |u - \bar{u}|^2 dz + \int_{\Pi} (1 + |x|)^{\alpha-2} |\bar{u}| dx < \infty$$

где $\nabla_z = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, ..., \frac{\partial}{\partial z_m} \right), \quad \alpha = const, \quad \bar{u}(x) = \frac{1}{mes\Omega} \int_{\Omega} u(z) dz.$

Норму элемента $u(z) \in W_\alpha(\Pi)$ определим следующим образом:

$$\|u\|_{W_2}^2 = \int_{\Pi} (1 + |x|)^\alpha |\nabla_z u|^2 dz + \int_{\Pi} (1 + |x|)^\alpha |u - \bar{u}|^2 dz + \int_{\Pi} (1 + |x|)^{\alpha-2} |\bar{u}| dx < \infty.$$

Определение. Функция $u(z) \in W_\alpha(\Pi)$ называется обобщенным решением задачи (1)-(2)

$$\sum_{ij=1}^{m} \int_{\Pi} a_{ij}(z) \frac{\partial u}{\partial z_i} \frac{\partial \psi}{\partial z_j} dz = \sum_{i=1}^{m} f_j(z) \frac{\partial \psi}{\partial z_i} dz \quad (3)$$

при любой $\psi(z) \in W_2^1(\Pi),$ равной нулю, при $|z|$ достаточно большим.

Пространство $\overset{\circ}{W}_\alpha(\Pi)$ определяется введением нормы:

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}_\alpha(\Pi)}^2 = \int_{\Pi} |x|^\alpha \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx + \int_{R^n} |x|^{\alpha-2} |\bar{u}| dx +$$

$$+ \int_{\Pi} (1 + |x|)^\alpha |\nabla_z (u - \bar{u})|^2 dz + \int_{\Pi} (1 + |x|)^{\alpha-2} |u - \bar{u}| dx.$$

Функция $u(z) \in \overset{\circ}{W}_{\alpha}(\Pi)$ называется обобщенным решением задачи (1),(2), если равенство (3) выполняется при любой $\psi(z),$ такой, что $\psi(z) = 0$ при $|x| > R,$ и при $|x| < \dfrac{1}{R},$ $\psi(z) \in W_2^1(\Pi),$ где $W_2^1(\Pi)$-пространство Соболева. Легко видеть, что если $\alpha \le 0,$ то $\overset{\circ}{W}_{\alpha}(\Pi) \subset W_{\alpha}(\Pi)$ и обобщенные решение из $\overset{\circ}{W}_{\alpha}(\Pi)$ является обобщённым решением из $W_{\alpha}(\Pi).$

Введем еще пространство L_{α}. Норма элемента $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in L_{\alpha}$ определяется следующим образом:

$$\| f \|_{L_{\alpha}}^2 = \sum_{i=1}^{m} \int_{R^n} |x|^{\alpha} \left| \overline{f}_i \right| dx + \sum_{i=1}^{n} \int \left(1 + |x|\right)^{\alpha} \left| f - \overline{f} \right|^2 dz + \sum_{i=n+1}^{m} \int_{\Pi} \left(1 + |x|\right)^{\alpha} |f_i|^2 dz.$$

Коэффициенты $a_{ij}(z) -$ ограниченные измеримые функции, такие что $\lim\limits_{|x| \to \infty} a_{ij}(z) = \delta_{ij}.$

Из результатов работы [15] следует, что если выполняется условие

$$\int_{\Pi} \left(1 + |x|\right)^{s} |\nabla_z u|^2 dz < \infty \quad (4)$$

при $s + n > 0,$ $f \mid (z) = 0,$ $0 \le i \le m$ то $u(z) = const.$

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial z_i} a_{ij}(z) \frac{\partial u}{\partial z_j} = 0, \quad z \in \Pi \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad z \in \partial \Pi \quad (6)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если Ω звездная область, $u(z)$ решение задачи (5),(6) в Π такое , что

$$\int_{\Pi} \left(1 + |x|\right)^{\alpha} |\nabla u|^2 dz < \infty$$

при каком-нибудь $\alpha > 2 - n,$ то $u(z) \equiv C.$

Рассмотрим теперь асимптотику решения задачи (1),(2) при $|x| \to \infty$ в случае $n = 2.$. Будем предполагать, что Ω звездная область.

Теорема 2. Если R решение задачи (5),(6) в области $\Pi_{1,\infty} = \{z : z \in \Pi, 1 < |z| < \infty\}$ такое, что $\int\limits_{\Pi_{1,\infty}} |\nabla u|^2 dz < \infty,$ $\left| a_{ij}(z) - \delta_{ij} \right| \le \omega(|z|),$

где $\int_0^\infty \frac{\omega(t)}{t}dt < \infty$, $\omega(t)$-не возрастающая функция, то $u(z) = u_0(z) + c_1$ где $|u_0(z)| \le c|x|^{-1}$, $z \in \Pi_{1,\infty}$.

Доказательство. Из формулы Грина следует

$$\int_{\Pi_{\alpha,\infty}} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(z)\frac{\partial u}{\partial z_i}\frac{\partial u}{\partial z_j}dz = \int_{|x|=\alpha} u\frac{\partial u}{\partial \nu}ds, \quad \alpha > 1. \qquad (7)$$

Пусть $\bar{u} = (mes\Omega)^{-1}\int_{\Omega} u(z)dy.$

Тогда имеем

$$\int_{\Pi_{1,\infty}} (1-\omega(\alpha))|\nabla u|^2 dz = \int_{|x|=\alpha} \left(u-\bar{u}\right)\frac{\partial u}{\partial \nu}ds + \bar{u}\int_{|x|=\alpha} u\frac{\partial u}{\partial \nu}ds\ . \qquad (8)$$

Из формулы Грина также следует, что

$$\int_{|x|=\alpha_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}ds = \int_{|x|=\alpha_2} \frac{\partial u}{\partial \nu}ds, \quad \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0, \qquad (9)$$

Так как по теореме о среднем:

$$\int_{\Pi_{\lambda,2\lambda}} |\nabla u|^2 dz = \lambda \int_{|x|=\lambda'} |\nabla u|^2 dz, \quad \lambda < \lambda' < 2\lambda,$$

то $$\int_{|x|=\lambda'} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| ds \le \left(\int_{|x|=\lambda'} |\nabla u|^2 ds\right)^{1/2} c\lambda^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_{\Pi_{\lambda,2\lambda}} |\nabla u|^2 dz\right)^{1/2} \to 0 \text{ при } \lambda \to 0.$$

Устремляя в (9) α_2 к бесконечности получим, что

$$\int_{|x|=\alpha_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}ds = 0 \text{ при любом } \alpha_1 > 1.$$

Отсюда и из (8):

$$\int_{\Pi_{1,\infty}} (1-\omega(\alpha)|\nabla u|^2 dz \le \int_{|x|=t} \left(u-\bar{u}\right)\frac{\partial u}{\partial \nu}ds \le$$

$$\le \left[\int_{|x|=t} |u-\bar{u}|^2 \frac{\partial u}{\partial \nu}ds\right]^{1/2} \left[\int_{|x|=t} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 ds\right]^{1/2}.$$

Используя неравенство Пуанкаре, при достаточно большом t получим:

$$\int\limits_{\Pi_{1,\infty}} (1-\omega(\alpha))|\nabla u|^2 dz \le t\left[(1-\omega(\alpha))\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| + \left(\omega(t)\frac{|\nabla' u|}{\tau}\right)^2 ds\right]^{1/2}\left[\int\limits_{|x|=t}|\nabla' u|^2 ds\right]^{1/2} \quad (10)$$

где ∇' градиент как функции $(y_1, y_2, ..., y_k)$. С помощью неравенства Коши из (10) получим

$$\int\limits_{\Pi_{t,\infty}} (1-\omega(\alpha))|\nabla u|^2 dz \le \frac{t(1+\omega(t))}{2}\int\limits_{|x|=t}|\nabla' u|^2 dz \quad (11)$$

Обозначим $\psi(t) = \int\limits_{\Pi_{t,\infty}}|\nabla u|^2 dz.$ Тогда в силу (11):

$$[1+\omega(t)]\psi(t) = -\frac{(1+\omega(t))}{2}\psi'(t)$$

Интегрируя это неравенство, получим

$$\psi(t) \le \frac{c_1}{t^2}.$$

Таким образом:

$$\int\limits_{\Pi_{t,\infty}}|\nabla u|^2 dz \le \frac{c_1}{t^2}.$$

Пусть $T(t) = \dfrac{1}{mes\Pi_{t,2t}}\left[\int\limits_{\Pi_{t,2t}} u(z)dz\right].$

Из неравенства Пуанкаре:

$$\int\limits_{t,2t} |u(z)-T(t)|^2 dz \le ct^2 \int\limits_{\Pi_{t,2t}}|\nabla u|^2 dz \le c_1$$

Рассмотрим функцию $V(z) = u(z) - T(t).$

Если Ω преобразовать в куб с ребром β и $V(t)$ продолжить четным образом через грани этого куба последовательно $[t]+1$ раз, то получим в $\Pi_t = \{z : t < |x| < 2t, |y_i| < t\}$:

$$t^{-2}\int\limits_{\Pi_t'} V^2(z)dz + \int\limits_{\Pi_t'}|\nabla V|^2 dz \le ct^{-2+k}.$$

Если здесь сделаем замену $z = t\cdot z'$, то получим:

$$\int\limits_{\Pi_t'} V^2(z)dz + \int\limits_{\Pi_t'}|\nabla V|^2 dz \le ct^{-2}.$$

Отсюда $|V(z')| \le c_1 t^{-1}$ в Π_z'.

По принципу максимума, отсюда получаем:

$$\underset{\Pi_{1,\infty}}{OSC}\,u(z) \le c_1 t^{-1}\ . \ (12)$$

Так как $u(z)$ ограниченная функция, то существует предел $u(z)$ при $z \to \infty$ вдоль некоторой последовательности.

Отсюда следует неравенство

$$|u(z)| \le c|x|^{-1}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазья В.Г. О задаче Неймана в областях с нерегулярными границами. Сиб. Матем. журнал, 1968, т.9, 36, с. 1322-1350
2. Багиров Л.А. Эллиптические уравнения в неограниченной области. Матем. Сб., 1971, т.86(128), №1, с. 121-139.
3. Олейник О.А., Иосифян Г.А. О поведении на бесконечности решений задачи Неймана для эллиптическаго уравнения второго порядка в неограниченной области. Успехи матем. наук, 1980, т.35, вып.4, с. 197-197.
4. Олейник О.А., Иосифян Г.А. О поведении на бесконечности решений эллиптическаго уравнения второго порядка в областях с некомпактной границей. Матем. Сб., 1980, т.11, вып.4, с. 260-274.
5. Ландис Е.М., Панасенко Г.П. Об одной варианте теоремы типа Фрагмена-Ланделефа для эллиптических уравнений с коэффициентами, периодическим по всем переменным, кроме одной. Тр. семинара им. И.Г.Петровского 1987, вып.5 105-136
6. Кондратев В.А., Олейник О.А. Об асимпотике в окрестности бесконечности решений с конечным интегралом Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка. Тр. семинара им. И.Г. Петровского, 1987, вып 5, с. 149-163.
7. Григорян А.А. О существовании положительных фундаментальных решений уравнении Лапласа на Римановых многообразиях. Матем сб. 1985, т.128, 3 5, с. 354-363.
8. Кондратьев В.А., Олейник О.А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях Неравенство Корна. Успехи матем. наук, 1988, т.43, вып.5, с.55-98.
9. Кондратьев В.А., Олейник О.А. Об одной задаче Санчесе-Паленсия . Успехи мат.наук. 1984, т. 39, вып 6, с. 257-258.
10. Кондратьев В.А., Олейник О.А. о неравенствах Харди и Корна для некоторого класса неограниченных областей и их приложение в теории упругости. ДАН СССР, 1990, т. 312, 3 6, с.1299-1304.
11. Искендеров И.А., Эйвазов Э.Х. Эфендиев А.Н. Приципы изучения в цилиндрической области. Диффенц. уравнения, т.23, № 10, 1987, с. 1804-1807.
12. Искендеров Б.А. Принципы изучения для эллиптических уравнений в цилиндрических областях. Автореф. докт.дисс. Баку, 1994.
13. Асланов Г.И. О задаче Неймана для эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях. Дифферец. уравнения , 1994, т.30, № 3 с. 329-331.
14. Асланов Г.И. О задаче Неймана для эллиптических уравнений второго порядка в неограниченным слое. Доклады РАН, 1993, т. 330, №2, с. 133-136.
15. Гасымов М.Г., Асланов Г.И. О существовании и асимптотическом поведении обобщенных решений задачи Неймана для эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях типа слоя. Диффренц. уавнения, 2001, т 37, №12, с.1618-1628.
16. Ландыжеская О.А. Краевые задачи математической физики. Наука, м. 1973.
17. Ландыжеская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. «Наука», 1993.
18. Стейн Е.М. сигулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М. «Мир» 1973.
19. Agmon S. Lectures on elliptic value problems Van No strand |Mathematical Studies. Prinseton 1965.
20. De-Giorgia E. Su una teoria generale della misure (r-1)-rimensional in ina spazio adrdimension. Ann.Math.ser.4, 1954, vol 36. p.1910231.

UDC 519.21

OBTAINING THE FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATION FOR GENERATING FUNCTION OF A SEMI-MARKOVIAN RANDOM WALK WITH NEGATIVE DRIFT AND POSITIVE JUMPS

T. I. NASIROVA, E. A. IBAYEV

Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of AR

Baku, Azerbaijan

elshanibayev@gmail.com

ABSTRACT

In this paper, we will investigate the semi-Markovian random walk processes with negative drift and positive jumps. The random variable which is called the numbers of the steps for the first moment of reaching positive level, is introduced. Integral equation for the generating function of the distribution of this random variable is obtained. Length of jump is given by the gamma distribution resulting in a fractional order integral equation. The purpose of this paper is to reduce the fractional order integral equation to a fractional order differential equation. Finally, explicit form for the generating function is obtained.

Keywords: Generating function, random variable, semi-Markovian random walk process, fractional order differential equation.

ПОЛУЧЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ ПРОЦЕССЫ ПОЛУМАРКОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ СНОСОМ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ СКАЧКАМИ

РЕЗЮМЕ

В статье исследуется полунмарковские случайные блуждания с отрицательным сносом и положительными скачками. Вводится случайная величина, называемая номерами шагов для первого момента достижения положительного уровня. Получено интегральное уравнение для производящей функции распределения этой случайной величины. Длина прыжка определяется гамма-распределением, что приводит к интегральному уравнению дробного порядка. Целью данной статьи является сведение интегрального уравнения дробного порядка к дифференциальному уравнению дробного порядка. В конце, получена точная формула для производящей функции.

Ключевые слова: Производящая функция, случайная величина, процесс полумарковского блуждания, дифференциальное уравнение дробного порядка.

MƏNFİ AXINLI, MÜSBƏT SIÇRAYIŞLI SEMİ-MARKOV DOLAŞMA PROSESİNİN DOĞURAN FUNKSİYASI ÜÇÜN KƏSR TƏRTİB DİFERENSİAL TƏNLİYİN ALINMASI

XÜLASƏ

Məqalədə mənfi axınlı, müsbət sıçrayışlı semi-Markov dolaşma prosesini tədqiq edəcəyik. Müsbət səviyyəyə birinci dəfə şatmaq üşün atılar addımlar sayı adlanan təsadüfi kəmiyyət daxil edilmişdir. Bu təsadüfi kəmiyyətin paylanmasının doğuran funksiyası üşün inteqral tənlik qurulmuşdur. Sıçrayışın uzunluğu Qamma paylanması ilə verilir nəticədə kəsr tərtib inteqral tənlik alınır. Məqalədə məqsəd qurulmuş inteqral tənliyi kəsr tərtib diferensial tənliyə gətirməkdir. Sonda, doğuran funksiya üşün dəqiq formul alınmışdır.

Açar sözlər: Doğuran funksiya, təsadüfi kəmiyyət, semi-Markov dolaşma prosesi, kəsr tərtib diferensial tənlik.

1. İNTRODUCTION

As is known, quite a lot of works in the fields of queuing, reliability, stock control, inventory theories and etc. are given by means of the semi-Markovian random walk process with barrier. Within the realm of finite-state processes, semi-Markovian processes are extremely flexible, and they should be a primary statistical tool for modeling stochastic processes. It is well known that the semi-Markovian processes have been introduced by L. Takács [1], P. L´evy [2] and W.L. Smith [3] in order to reduce the limitation induced by the exponential distribution of the corresponding time intervals. In the works of Nasirova and her collaborators the generating function of distribution of the boundary functional of semi-Morkovian random walk was studied (see, [4], [5], [6]). It should be noted that finding the generating function of the semi-Markovian random walk processes is a powerful tool in applied mathematics and engineering. It is well known the connection between semigroup theory and the Markov processes. In the semigroup theory of Markov processes, a particular process is usually represented as a semigroup of contraction operators in some concrete Banach space, and the properties of the particular process are deduced from the properties of the associated semigroup of operators. From this point of view, by Atangana in [7] it was shown that the Atangana Baleanu fractional derivative possesses the Markovian and non-Markovian properties. We also refer to [8] for more results on fractional modeling of probabilistic processes. We recall that, in [9] the authors studied a stepwise semi-Markovian processes. Then authors used the fractional Riemann-Liouville derivative. Moreover, the obtained solution for the fractional differential equation was in the form of a threefold sum. But in the presented paper, we obtained a mathematical model of a semi-Markovian process for a certain general class of probability distributions, and in the class of gamma distributions we managed to reduce the study of a mathematical model through a fractional differential equation with a fractional Weyl derivative. In conclusion, we were able to find an explicit form of the solution of the resulting fractional differential equation and hence, the exact probabilistic characteristics of the process under consideration. In this paper, jump processes with a waiting time between jumps that is not necessarily given by an exponential random variable is consider. In the present paper, we study the semi-Markovian random walk processes with negative drift, positive jumps. We construct an integral equation for the generating function of the conditional distribution of the numbers of the steps for the first moment of reaching positive level. In particular, constructed integral equation is reduced to the fractional order differential equation in the class of gamma distributions.

The paper is organized as follows. Sec. 2 contains problem statement and some preliminaries along with the standard ingredients used in the proofs. An integral equation for the generating function of the conditional distribution of the numbers of the steps for the first moment of reaching at positive level by the semi-Markovian random walk processes with negative drift, positive jumps is given in Sec. 3. Also, in Sec. 3, it is shown that the obtained integral equation is reduced to a fractional differential equation in the class of gamma distributions. The main result is proved in Sec. 4. Finally, conclusions of this study are given in Sec. 5.

2. PROBLEM STATEMENT AND PRELIMINARIES

Let there be given a sequence of independent and identically distributed pairs of random variables $\{\xi_k, \zeta_k\}_{k\geq 1}$ defined on the probability space (Ω, F, P), where the random variables

ξ_k and ζ_k, $k=\overline{1,\infty}$ are positive and independent. Using these random variables, we construct the following semi-Markovian random walk process (see [10]):

$$X_z(t)=z-t+\sum_{i=0}^{k-1}\zeta_i \text{, if } \sum_{i=0}^{k-1}\xi_i \le t < \sum_{i=0}^{k}\xi_i \quad k=\overline{1,\infty},$$

where $\xi_0=\zeta_0=0$. $X_z(t)$ is called the semi-Markovian random walk process with negative drift, positive jumps.

One of the realization of the semi-Markovian random walk process $X_z(t)$ is shown in Figure1

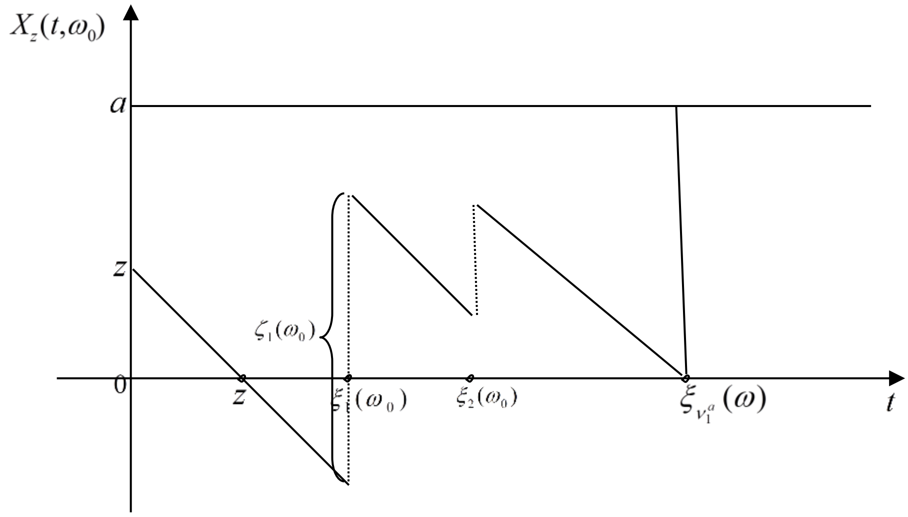

Figure 1. The semi-Markovian random walk process $X_z(t)$

Here ν_1^a is the numbers of the steps for the first moment of reaching at level a (a>0) by process $X_z(t)$:

$$\nu_1^a=\min\left\{k: z-\sum_{i=1}^{k}[\xi_i-\zeta_i]\ge a\right\}.$$

The aim of the present work is to determine the generating function of the conditional distribution of the random variable ν_1^a.

3. GENERATING FUNCTION OF THE CONDITIONAL DISTRIBUTION ν_1^a.

We set

$$\psi(u\,|\,z)=E\left(u^{\nu_1^a}\middle|X_z(0)=z\right)=\sum_{k=1}^{\infty}u^k P\left\{\nu_1^a=k\middle|X_z(0)=z\right\}\quad 0<u\le 1.$$

The function $\psi(u\,|\,z)$ is called the generating function of the conditional distribution of the ν_1^a.

Theorem 1. Let $X_z(t)$ be the semi-Markovian random walk process with negative drift, positive jumps. Then integral equation for the generating function of the conditional distribution of the ν_1^a has the form

$$\psi(u|z) = u\int_0^\infty p_{\xi_1}(x)P\{\zeta_1 > a - z + x\}dx + u\int_z^a \psi(u|y)\int_0^\infty d_y P\{\zeta_1 < x + y - z\}d_x P\{\xi_1 < x\} + \\ + u\int_{-\infty}^z \psi(u|y)\int_{z-y}^\infty d_y P\{\zeta_1 < x + y - z\}d_x P\{\xi_1 < x\}. \tag{1}$$

Proof. Using by the law of total probability for $k \geq 2$, we have

$$P\{\nu_1^a = k|X_z(0) = z\} = \int_{y=-\infty}^a P\{z - \xi_1 + \zeta_1 \in dy\}P\{\nu_1^a = k-1|X_z(0) = y\}.$$

Multiplying both sides of last equality by u^k $(0 < u \leq 1)$, summing for $k = \overline{2,\infty}$ we get

$$\sum_{k=2}^\infty u^k P\{\nu_1^a = k|X_z(0) = z\} = \sum_{k=2}^\infty u^k \int_{y=-\infty}^a P\{z - \xi_1 + \zeta_1 \in dy\}P\{\nu_1^a = k-1|X_z(0) = y\}.$$

From last equation we have

$$\sum_{k=1}^\infty u^k P\{\nu_1^a = k|X_z(0) = z\} = uP\{\nu_1^a = 1|X_z(0) = z\} + \sum_{k=2}^\infty u^k \int_{y=-\infty}^a P\{z - \xi_1 + \zeta_1 \in dy\}P\{\nu_1^a = k-1|X_z(0) = y\}.$$

After some transformations, the last integral equation takes the form

$$\psi(u|z) = uP\{z - \xi_1 + \zeta_1 > a\} + u\int_{y=-\infty}^a \psi(u|y)P\{z - \xi_1 + \zeta_1 \in dy\}.$$

and

$$\psi(u|z) = u\int_0^\infty p_{\xi_1}(x)P\{\zeta_1 > a - z + x\}dx + u\int_{y=-\infty}^a \psi(u|y)\int_{x=\max(0,z-y)}^\infty d_y P\{\zeta_1 < x + y - z\}d_x P\{\xi_1 < x\}.$$

Thus, generating function of the conditional distribution ν_1^a satisfies the integral equation (1)

This completes the proof.

Let's assume that random variable ξ_1 has the gamma distribution with parameters $\alpha > 0$ and $\beta > 0$, while random variable ζ_1 has the exponential distribution with parameter λ:

$$\rho_{\xi_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \qquad \rho_{\zeta_1}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

In the class of these distributions the integral equation (1) has the form

$$\psi(u|z) = \frac{u\beta^\alpha e^{-\lambda(a-z)}}{(\lambda+\beta)^\alpha} + \frac{u\lambda\beta^\alpha e^{\lambda z}}{\Gamma(\alpha)}\int_z^a e^{-\lambda y}\psi(u|y)\int_0^\infty e^{-(\lambda+\beta)x}x^{\alpha-1}dxdy + \\ + \frac{u\lambda\beta^\alpha e^{\lambda z}}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^z e^{-\lambda y}\psi(u|y)\int_{z-y}^\infty e^{-(\lambda+\beta)x}x^{\alpha-1}dxdy. \tag{2}$$

Multiplying both sides of equation (2) by $e^{-\lambda z}$ and differentiating both sides with respect to z, we obtain

$$e^{-\lambda z}\psi'(u|z)-\lambda e^{-\lambda z}\psi(u|z)=-\frac{u\lambda\beta^{\alpha}e^{-(\lambda+\beta)z}}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{z}e^{\beta y}\psi(u|y)(z-y)^{\alpha-1}\,dy.$$

Multiplying both sides of last equation by $e^{-(\lambda+\beta)z}$, we obtain

$$e^{\beta z}\psi'(u|z)-\lambda e^{\beta z}\psi(u|z)=-\frac{u\lambda\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{z}e^{\beta y}\psi(u|y)(z-y)^{\alpha-1}\,dy. \quad (3)$$

We set

$$Q(u|z)=e^{\beta z}\psi(u|z). \quad (4)$$

From equation (3), we obtain

$$Q_z'(u|z)-(\lambda+\beta)Q(u|z)=-\frac{u\beta^{\alpha}\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{z}Q(u|y)(z-y)^{\alpha-1}du.$$

It is known that the Weyl fractional integral is defined as

$$I^{\alpha}(Q(u|z))=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{z}Q(u|y)(z-y)^{\alpha-1}dy.$$

Taking into account the last equality, we have

$$Q_z'(u|z)-(\lambda+\beta)Q(u|z)+u\beta^{\alpha}\lambda I^{\alpha}(Q(u|z))=0. \quad (5)$$

Let $\alpha\in(0,1)$ and let $\phi(z)$ be a differentiable function in $(0,\infty)$. The Weyl fractional derivative of order α of a function $\phi(z)$ is defined as (see [11] and [12])

$$D^{\alpha}\phi(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{z}(z-u)^{-\alpha}\phi'(u)du.$$

Taking into account the last equality, we have

$$D_z^{\alpha+1}(Q(u|z))-(\lambda+\beta)D_z^{\alpha}(Q(u|z))+\lambda\beta^{\alpha}uQ(u|z)=0. \quad (6)$$

Thus, we have proved the following theorem.

Theorem 2. Let $X_z(t)$ be the semi-Markovian random walk process with negative drift, positive jumps. Let ξ_1 be a random variable has the gamma distribution with parameters $\alpha>0$ and $\beta>0$ and let ζ_1 be a random variable has the exponential distribution with parameter $\lambda>0$. Then integral equation (1) is reduced to the fractional differential equation (6).

4. SOLUTION OF EQUATION

Suppose that $k(u)$ is a real function defined on $(0,\infty)$. Then we can find the Weyl fractional derivative of order α of the function $e^{k(u)z}$ with respect to z:

$$D_z^{\alpha}\, e^{k(u)z} = \left[k(u)\right]^{\alpha} e^{k(u)z}.$$

Let us seek the solution of fractional order differential equation (6) in the form $Q(u|z) = C(u)e^{k(u)z}$. Here $k(u)$ is a solution of the characteristic equation of (6) with fractional exponents

$$\left[k(u)\right]^{\alpha+1} - (\mu+\beta)\cdot\left[k(u)\right]^{\alpha} - \mu\,\beta^{\alpha} u = 0. \tag{7}$$

and the unknown function $C(u)$ can be determined from initial condition

$$\begin{aligned}\psi(u|0) = {} & \frac{u\beta^{\alpha} e^{-\lambda a}}{(\lambda+\beta)^{\alpha}} + \frac{u\lambda\beta^{\alpha}}{(\lambda+\beta)^{\alpha}} \int_0^a e^{-\lambda y} \psi(u|y)\,dy + \\ & + \frac{u\lambda\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda y} \psi(u|y) \int_{-y}^{\infty} e^{-(\lambda+\beta)x} x^{\alpha-1}\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{8}$$

From (4) we have

$$\psi(u|z) = C(u)e^{(k(u)-\beta)z}. \tag{9}$$

It is obvious that $\psi(1|z) = 1$. Hence, we obtain that $C(1) = 1$ and $k(1) = \beta$.

So, we have proved the following theorem.

Theorem 3. Let $X_z(t)$ be the semi-Markovian random walk process with negative drift, positive jumps. Let ξ_1 be a random variable has the gamma distribution with parameters $\alpha > 0$ and $\beta > 0$ and let ζ_1 be a random variable has the exponential distribution with parameter $\lambda > 0$.

Then an exact solution of the fractional differential equation (8) is given by (9).

5. CONCLUSION

The main goal of this paper is to study the semi-Markov random walk processes with negative

drift, positive jumps. We construct an integral equation for the generating function of the conditional distribution of the numbers of the steps for the first moment of reaching at positive level by the semi-Markovian random walk processes with negative drift, positive jumps. In particular, constructed integral equation is reduced to the fractional order differential equation in the class of gamma distributions. The fractional derivatives are described in the Weyl sense. Finally, we find an exact solution of the fractional order differential equation.

REFERENCES

1. Takács, L. Some investigations concerning recurrent stochastic processes of a certain type. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int.Kzl. 3, 1954, 115-128.
2. Lev'y, P. Proceesus semi-markoviens. Proc. Inter. Cong. Math. 3 (1954), Amsterdam, 416-426.
3. Smith, W. L. Regenerative stochastic processes. Proc. Roy. Soc. Lond. A. 232(1188), 1955, 6-31.
4. Babayev Sh.A. On finding of generating function of steps number of some class semimarkov process with upper delaying screen // Proceeding of Institute of Mathematics and Mechanics , Baku 2004, v. XXI (XXIX), p. 45-50. (In Russian).
5. Sadikova R.I. Generating function of distribution of the upper boundary functional of semi-Morkov random walk. // News of ANAS, 2007, Vol. XXVII, №2-3, pp.101-105. (In Russian).
6. Aliyeva T.A, Cafarov K.M. The distribution of the first moment of escaping of a condition zero point of the process of semi-Markov random walk with positive and negative drifts, with delaying screein zero point // Mathematics, International ecoenergy academy, 1. 2004, p. 15-20.
7. Atangana, A. Non validity of index law in fractional calculus: A fractional differential operator with Markovian and non- Markovian properties, Physica A: Stat. Mech.Appl., 505, 2018, 688-706.
8. Atangana, A and Bonyah, E. Fractional stochastic modeling: New approach to capture more heterogeneity, Chaos 29, 013118 (2019). doi: 10.1063/1.5072790.
9. Bandaliyev R.A., Nasirova T.H. and Omarova K.K. Mathematical modeling of the semi-Markovian random walk processes with jumps and delaying screen by means of a fractional order differential equation. Math. Meth. Appl. Sci. 41(18), 2018, 9301-9311.
10. Nasirova T.H. *Processes of Semi-Markov Random* Walk, Elm, Baku, 1984. (In Russian).
11. Mainardi, F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models*. World Scientific, 2010.
12. Miller, K.S. and Ross, B. *An Introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.* Wiley, New York, 1993.

2023. Volume 7, Number 1 Pages 25-32

УДК 517.977.56

ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

М.Я. НАДЖАФОВА

Институт Систем Управления Министерства Науки и

Образования Азербайджанской Республики

nacafova.melahat@mail.ru

РЕЗЮМЕ

В работе исследуется задача оптимального управления, описываемая системой нелинейных разностных уравнений типа Вольтерра с нелокальными краевыми условиями.

Применяя метод приращений, вычисляется специальное приращение функционала и с его помощью доказываются различные необходимые условия оптимальности первого порядка.

При этом налагаются различные условия гладкости на параметры задачи.

Ключевые слова: допустимое управление, разностное уравнение Вольтерра, функционал качества, необходимое условие оптимальности, дискретный принцип максимума, линеаризованный принцип максимума, аналог уравнения Эйлера.

ON A DISCRETE NONLOCAL OPTIMAL CONTROL PROBLEM

ABSTARCT

The paper investigates the optimal control problem described by a system of nonlinear Volterra difference equations with nonlocal boundary conditions.

Using increment method, a special increment of the functional is calculated and various necessary conditions of optimality of the first order are proved with its help.

In this case, various smoothness conditions are imposed on the parameters of the problem.

Keywords: admissible control, Volterra difference equation, performance functional, necessary optimality condition, discrete maximum principle, linearized maximum principle, analogue of the Euler equation.

BİR DİSKRET LOKAL OLMAYAN İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

XÜLASƏ

Məqalədə qeyri-xətti Volterra tip fərq tənliklər sistemi ilə təsvir olunn bir optimal idarəetmə məsələsi tədqiq olunur.

Artım üsulu vasitəsilə funksionalın xüsusi artımı hesablanır və onun vasitəsilə optimallıq üçün müxtəlif birinci tərtib zəruri şərtlər alınır.

Bu halda məsələnin parametrləri üzərində müxtəlif hamarlıq şərtləri qoyulur.

Açar sözlər: mümkün idarə, Volterra fərq tənliyi, keyfiyyət funksionalı, optimallıq üçün zəruri şərt, diskret maksimum prinsipi, xəttiləşdirilmiş maksimum prinsipi, Eyler tənliyinin analoqu.

1. Введение.

В работах [1, 2] были изучены ряд задач оптимального управления, описываемые обыкновенными разностными уравнениями с нелокальными краевыми условиями.

В предлагаемой работе рассматривается задача оптимального управления, описываемая нелинейным разностным уравнением типа Вольтерра с нелокальными краевыми условиями.

При различных предположениях на данные задачи оптимального управления, установлены некоторые необходимые условия оптимальности первого порядка.

2. Постановка задачи.

Предположим, что $t_0 < t_1$ – заданные числа, причем разность $t_1 - t_0$ – есть натуральное число.

Через $T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}$ обозначим конечную последовательность.

Пусть управляемый процесс описывается системой нелинейных разностных уравнений Вольтерра

$$x(t+1) = \sum_{\tau=t_0}^{t} f\big(t, \tau, x(\tau), u(\tau)\big), t \in T \ (1)$$

с краевыми условиями

$$L_0 x(t_0) + L_1 x(t_1) = \ell. \ (2)$$

Здесь $f(t, x, u)$ заданная -мерная вектор-функция, дискретная по (t, τ) и непрерывная по (x, u) вместе с частными производными по x, L_0, L_1 заданные $(n \times n)$ постоянные матрицы, ℓ – заданный постоянный вектор, $u(t)$ – r-мерный дискретный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U \subset R^r$, т.е.

$$u(t) \in U \subset R^r, t \in T, \ (3)$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми управлениями.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t)$ соответствует единственное решение $x(t)$ краевой задачи (1)-(2).

Пусть $\varphi(x_0, x_1)$ — заданная непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

На решениях краевой задачи (1)-(2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим функционал

$$J(u) = \varphi\big(x(t_0), x(t_1)\big) \ (4)$$

и рассмотрим задачу о нахождении минимального значения функционала (4) при ограничениях (1)-(3).

Допустимое управление, $u(t)$ доставляющее минимальное значение функционалу (4) при ограничениях (1)-(3) назовем оптимальным, а соответствующий процесс $\big(u(t), x(t)\big)$ – оптимальным процессом.

Предполагается, что оптимальное управление в рассматриваемой задаче существует.

3. Аналог дискретного принципа максимума.

Пусть $u(t)$ и $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ некоторые допустимые управления. Через $x(t)$ и $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$ обозначим соответствующие им решения краевой задачи (1)-(2).

Из введенных обозначений ясно, что приращение $\Delta x(t)$ траектории $x(t)$ является решением краевой задачи

$$\Delta x(t+1)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\left(f\big(t,\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau)\big)-f\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\right), (5)$$

$$L_0\Delta x(t_0)+L_1\Delta x(t_1)=0. (6)$$

Через $\lambda\in R^n$ и $\psi(t)\in R^r, t\in T\cup t_1$ –обозначим пока произвольные -мерные постоянный вектор и вектор-функцию.

Из тождеств (5) и (6) получаем, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t)\Delta x(t+1)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\psi'(t)\left(f\big(t,\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau)\big)-f\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\right)\right], (7)$$

$$\lambda' L_0\Delta x(t_0)+\lambda' L_1\Delta x(t_1)=0. (8)$$

Используя (применяя) дискретный аналог формулы Фубини (см. например, [3]) получим, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\psi'(t)\left(f\big(t,\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau)\big)-f\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\right)\right]=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t}^{t_1-1}\psi'(t)\left(f\big(\tau,t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\big)-f\big(\tau,t,x(t),u(t)\big)\right)\right]. (9)$$

Далее получаем, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t)\Delta x(t+1)=\psi'(t_1-1)\Delta x(t_1)-\psi'(t_0-1)\Delta x(t_0)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t-1)\Delta x(t). (10)$$

Введем аналог функции Гамильтона-Понтрягина в форме

$$H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)=\sum_{\tau=t}^{t_1-1}\psi'(\tau)f\big(\tau,t,x(t),u(t)\big).$$

Тогда, учитывая тождества (9), (10) формула приращения функционала качества (4) может быть записана в виде

$$\Delta J(u)=J(\bar{u})-J(u)=\varphi\big(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1)\big)-\varphi\big(x(t_0),x(t_1)\big)+$$

$$+\lambda' L_0\Delta x(t_0)+\lambda' L_1\Delta x(t_1)+\psi'(t_1-1)\Delta x(t_1)-\psi'(t_0-1)\Delta x(t_0)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t-1)\Delta x(t)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big)-H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\right]. (11)$$

Далее на основе формулы Тейлора получаем, что

$$\varphi\big(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1)\big)-\varphi\big(x(t_0),x(t_1)\big)=$$

$$=\frac{\partial\varphi'\big(x(t_0),x(t_1)\big)}{\partial x(t_0)}\Delta x(t_0)+\frac{\partial\varphi'\big(x(t_0),x(t_1)\big)}{\partial x(t_1)}\Delta x(t_1)+o_1([\|\Delta x(t_0)\|+\|\Delta x(t_1)\|]). (12)$$

$$H\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big)-H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)=H\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big)-$$
$$-H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)+\Big(H_x\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big)-H_x\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\Big)'\varDelta x(t)+$$
$$+H_x'\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\varDelta x(t)+o_2(\|\varDelta x(t)\|).\ (13)$$

Здесь $\|\alpha\|$ норма вектора $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)'$, определяемая формулой $\|\alpha\|=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$, а $o(\alpha)$ −величина более высокого, чем α, т.е. $o(\alpha)/\alpha\to 0$ при $\alpha\to 0$.

Учитывая формулы (12) и (13) в формуле приращения (11) получим, что

$$\varDelta J(u)=\frac{\partial\varphi'\big(x(t_0),x(t_1)\big)}{\partial x(t_0)}\varDelta x(t_0)-\frac{\partial\varphi'\big(x(t_0),x(t_1)\big)}{\partial x(t_1)}\varDelta x(t_1)+o_1([\|\varDelta x(t_0)\|+\|\varDelta x(t_1)\|])+$$
$$+\lambda' L_0\varDelta x(t_0)+\lambda' L_1\varDelta x(t_1)+\psi'(t_1-1)\varDelta x(t_1)-\psi'(t_0-1)\varDelta x(t_0)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t-1)\varDelta x(t)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\big[H\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big)-H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\big]-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_x'\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\varDelta x(t)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Big(H_x\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big)-H_x\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\Big)'\varDelta x(t)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_2(\|\varDelta x(t)\|).\ (14)$$

Предположим, что $\psi(t)$ является решением задачи

$$\psi(t-1)=H_x\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big),\ (15)$$
$$\psi(t_1-1)=-\frac{\partial\varphi'\big(x(t_0),x(t_1)\big)}{\partial x_1}-{L_1}'\lambda,$$
$$\psi(t_0-1)=\frac{\partial\varphi'\big(x(t_0),x(t_1)\big)}{\partial x_0}+{L_0}'\lambda.\ (16)$$

Тогда формула приращения (14) функционала качества примет вид

$$\Delta J(u)=-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\big[H\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big)-H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\big]-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Big(H_x\big(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big)-H_x\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\Big)'\varDelta x(t)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_2(\|\varDelta x(t)\|)+$$
$$+o_1([\|\varDelta x(t_0)\|+\|\varDelta x(t_1)\|]).\ (17)$$

Предположим, что множество

$$f(t,\tau,x(\tau);U)=\{\alpha:\alpha=f(t,\tau,x(\tau),v(\tau)),v(\tau)\in U,\tau\in T\}\ (18)$$

при всех (t,τ) является выпуклым.

Пусть $\varepsilon\in[0,1]$ произвольное число. Специальное приращение допустимого управления определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t)=v(t;\varepsilon)-u(t),t\in T.\ (19)$$

Здесь $v(t;\varepsilon)$ произвольное допустимое управление, такое, что

$$f\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau;\varepsilon)+\Delta u_\varepsilon(\tau)\big)-f\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big)=$$
$$=\varepsilon\big[f\big(t,\tau,x(\tau),v(\tau)\big)-f\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\big].\ (20)$$

Здесь $v(t)$ произвольное допустимое управление, отвечающее допустимому управлению $v(t;\varepsilon)$.

Из уравнения (5) получим, что $\Delta x(t)$ является решением линеаризованной задачи

$$\Delta x(t+1)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\Big[f_x\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\Delta x(\tau)+\Big(f\big(t,\tau,x(\tau),\bar u(\tau)\big)-f\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\Big)+$$
$$+\Big(f_x\big(t,\tau,x(\tau),\bar u(\tau)\big)-f_x\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\Big)\Delta x(\tau)+o_3(\|\Delta x(\tau)\|)\Big],\ (21)$$
$$L_0\Delta x(t_0)+L_1\Delta x(t_1)=0.\ (22)$$

Через $\Delta x(t;\varepsilon)$ обозначим специальное приращение траектории $x(t)$, отвечающее приращению (19) управления $u(t)$.

Положим

$$\Delta x(t;\varepsilon)=\varepsilon y(t)+o_4(\varepsilon;t),\ (23)$$

где $y(t)$ пока неизвестная -мерная вектор-функция.

Из (21)-(22) с учетом (23) получаем, что

$$\varepsilon y(t+1)+o_4(\varepsilon;t)=\varepsilon\sum_{\tau=t_0}^{t}\Big[f_x\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big)y(\tau)+\Big(f\big(t,\tau,x(\tau),v(\tau)\big)-f\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\Big)+$$
$$+o_5(\|\Delta x(\varepsilon;\tau)\|)\Big],$$
$$\varepsilon L_0 y(t_0)+\varepsilon L_1 y(t_1)=o_6(\varepsilon).$$

Разделяя обе части полученных соотношений на ε и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ получаем, что вектор-функция, определяемая формулой (23) является решением задачи

$$y(t+1)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\Big[f_x\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big)y(\tau)+\Big(f\big(t,\tau,x(\tau),v(\tau)\big)-f\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big)\Big)\Big],\ (24)$$
$$L_0 y(t_0)+L_1 y(t_1)=0.\ (25)$$

Учитывая разложение (23) в формуле приращения (17) получаем, что специальное приращение функционала () имеет вид

$$J\big(u(t)+\Delta u_\varepsilon(t)\big)-J\big(u(t)\big)=$$
$$=-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\big[H\big(t,x(t),v(t),\psi(t)\big)-H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\big]+o_7(\varepsilon).$$

Из полученного разложения следует

Теорема 1. *Если множество (17) выпукло, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство*

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H\big(t,x(t),v(t),\psi(t)\big)-H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\right]\le 0 \ (26)$$

выполнялось для всех $v(\tau)\in U, \tau\in T$.

Доказанная теорема является дискретным аналогом принципа максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи.

4. Линеаризованный принцип максимума.

Предположим, что в рассматриваемой задаче множество U выпуклое, а $f(t,\tau,x,u)$ – непрерывно дифференцируемая по (x,u) при всех (t,τ).

Тогда по аналогии с доказательством формулы (14) доказывается, что

$$\Delta J(u)=\frac{\partial\varphi'\big(x(t_0),x(t_1)\big)}{\partial x(t_0)}\Delta x(t_0)+\frac{\partial\varphi'\big(x(t_0),x(t_1)\big)}{\partial x(t_1)}\Delta x(t_1)+o_1([\|\Delta x(t_0)\|+\|\Delta x(t_1)\|])+$$

$$+\psi'(t_1-1)\Delta x(t_1)-\psi'(t_0-1)\Delta x(t_0)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t-1)\Delta x(t)+\lambda' L_0\Delta x(t_0)+\lambda' L_1\Delta x(t_1)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left(\frac{\partial H'\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial x}\Delta x(t)+\frac{\partial H'\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u}\Delta u(t)+\right.$$

$$\left.+o_7(\|\Delta x(t)\|+\|\Delta u(t)\|)\right). \ (27)$$

Если предполагать, что $\psi(t)$ и λ удовлетворяют соотношениям (15) и (16), то формула приращения (27) примет вид

$$\Delta J(u)=-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\frac{\partial H'\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u}\Delta u(t)+o_1([\|\Delta x(t_0)\|+\|\Delta x(t_1)\|])-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_7(\|\Delta x(t)\|+\|\Delta u(t)\|)\,. \ (28)$$

Пусть $\mu\in[0,1]$ произвольное число, а $v(t)\in U, t\in T$ произвольное допустимое управление.

Через $\Delta u(t;\mu)$ обозначим специальное приращение допустимого управления $u(t)$ по формуле

$$\Delta u(t;\mu)=\mu[v(t)-u(t)]. \ (29)$$

Пусть $\Delta x(t;\mu)$ специальное приращение траектории $x(t)$, отвечающее приращению (29) управления $u(t)$.

Из задачи (6)-(7) получаем, что $\Delta x(t;\mu)$ является решением линеаризованной задачи

$$\Delta x(t+1,\mu)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\frac{\partial f\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big)}{\partial x}\Delta x(\tau;\mu)+\frac{\partial f\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big)}{\partial u}\Delta u(\tau;\mu)+\right.$$

$$\left.+o_8(\|\Delta x(\tau;\mu)\|+\|\Delta u(\tau;\mu)\|)\right], \ (30)$$

$$L_0\Delta x(t_0;\mu) + L_1\Delta x(t_1;\mu) = 0. (31)$$

Учитывая линеаризованную систему (30)-(31) доказывается, что

$$\Delta x(t;\mu) = \mu z(t) + o(\mu;t), (32)$$

где $z(t)$ решение задачи

$$z(t+1) = \sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\frac{\partial f\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big)}{\partial x}z(\tau) + \frac{\partial f\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big)}{\partial u}\big(v(\tau)-u(\tau)\big)\right], (33)$$

$$L_0 z(t_0) + L_1 z(t_1) = 0. (34)$$

Принимая во внимания формулы (29), (32) в (28) получаем, что

$$J\big(u(t)+\Delta u(t;\mu)\big) - J\big(u(t)\big) = -\mu\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\frac{\partial H'\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u}[v(t)-u(t)] + o(\mu).$$

Из этого разложения следует

Теорема 2. Если множество U выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\frac{\partial H'\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u}[v(t)-u(t)] \le 0\ (35)$$

выполнялось для всех $v(t)\in U, t\in T$.

Неравенство (35) является аналогом линеаризованного (дифференциального) принципа максимума [4] для рассматриваемой задачи.

5. Аналог уравнения Эйлера.

Теперь предположим, что множество U открытое. Тогда специальное приращение допустимого управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u(t;\varepsilon) = \varepsilon\delta u(t), t\in T. (36)$$

Здесь ε достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t)\in R^r, t\in T$.

Пусть $\Delta x(t;\varepsilon)$ специальное приращение траектории $x(t)$, отвечающее специальному приращению (36) управления $u(t)$.

Используя линеаризованную систему получим, что $\Delta x(t;\varepsilon)$ является решением задачи

$$\Delta x(t+1;\varepsilon) = \sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\frac{\partial f\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big)}{\partial x}\Delta x(\tau;\varepsilon) + \frac{\partial f\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big)}{\partial u}\Delta u(\tau;\varepsilon) + \right.$$

$$\left. + o_8(\|\Delta x(\tau;\varepsilon)\| + \|\Delta u(\tau;\varepsilon)\|)\right],$$

$$L_0\Delta x(t_0;\varepsilon) + L_1\Delta x(t_1;\varepsilon) = 0.$$

Учитывая это доказывается, что

$$\Delta x(t;\varepsilon) = \varepsilon\delta x(t) + o(t;\varepsilon), (37)$$

где $\delta x(t)$ (вариация траектории) является решением уравнения в вариациях

$$\delta x(t+1) = \sum_{\tau=t_0}^{t} \left[\frac{\partial f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))}{\partial x} \delta x(\tau) + \frac{\partial f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))}{\partial u} \delta u(\tau) \right], t \in T,$$

$$L_0 \delta x(t_0) + L_1 \delta x(t_1) = 0.$$

Принимая во внимания формулы (36) и (37) в приращении (28) получим, что

$$J(u(t) + \Delta u(t;\varepsilon)) - J(u(t)) = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial H'(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial u} \delta u(t) + o(\varepsilon).$$

Из полученного разложения, в силу открытости области управления получаем, что вдоль оптимального управления $u(t)$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial H'(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial u} \delta u(t) = 0$$

для всех $\delta u(t) \in R^r, t \in T$.

Из этого тождества следует

Теорема 3. Если множество U открытое, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы соотношение

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial H'(\theta,x(\theta),u(\theta),\psi(\theta))}{\partial u} = 0 \ (38)$$

выполнялось для всех $\theta \in T$.

Необходимое условие (38) является аналогом уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи.

6. Заключение.

В работе применяя различные вариации допустимого управления при различных условиях гладкости на параметры задачи установлен ряд необходимых условий оптимальности в форме дискретного принципа максимума, линеаризованного условия максимума и аналог уравнения Эйлера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мансимов К.Б., Наджафова М.Я. *Об одной нелокальной дискретной задаче управления*, Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук. 2014, №4, с. 46-54.
2. Мансимов К.Б., Наджафова М.Я. *Квазиособые управления в задаче управления дискретными системами с нелокальными краевыми условиями*, Вестник Томского Государственного Университета. Управление, Вычислительная техника и информатика, 2019, № 46, с. 4-11.
3. Souyousefain M., Leela S. *Stability results for difference equations of Volterra type*, Appl. Math. Comput.1990, vol. 36, №1, pp. 51-61.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В. *Методы оптимизации*. Минск. Изд-во «Четыре четверти», 2011, 472 с.

2023. Volume 7, Number 1 Pages 33-38

УДК 517.977.96

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ПОДВИЖНЫМ ПРАВЫМ КОНЦОМ ТРАЕКТОРИИ

А.А.АБДУЛЛАЕВ [*,], К.В.МАНСИМОВ [*,**]**

Бакинский Государственный Университет

Институт Систем Управления

Министерства Науки и Образования Республики Азербайджана

aqshinabiloqlu@gmail.com, kamilbmansimov@gmail.com

РЕЗЮМЕ

Рассматривается задача оптимального управления описываемая нелинейным интегральным уравнением Вольтерра при наличии функциональных ограничений типа неравенств на правый конец траектории. Функции задающие функциональные ограничения и критерий качества являются гладкими функциями. Введя в рассмотрение аналоги сопряженных систем получены формулы приращения функционала качества и функционалов, задающие ограничение типа неравенств.

Сопряженные системы являются линейными неоднородными интегральными уравнениями типа Вольтерра.

Используя серию игольчатых вариаций вычислены вариации функционалов задающие критерий качества и функциональные ограничения. С их помощью доказан необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Л.С.Понтрягина, носящий конструктивный и нетрадиционный характер.

Полученный результат в дальнейщем может быть использован для исследования особых режимов.

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерра, принцип максимума Л.С.Понтрягина, необходимое условие оптимальности, оптимальное управление, допустимое управление.

ON ONE PROBLEM OF CONTROL DESCRIBED BY INTEGRAL EQUATIONS WITH MOVABLE RIGHT END OF THE TRAJECTORY

ABSTRACT

The optimal control problem described by the nonlinear Volterra integral equation in the presence of functional constraints of the type of inequalities on the right end of the trajectory is considered. The functions defining the functional constraints and the quality criterion are smooth functions. By introducing into consideration the analogs of conjugate systems the formulas for the increment of the quality functional and the functionals defining the constraint of inequality type were obtained.

The conjugate systems are linear inhomogeneous Volterra type integral equations.

Using a series of needle variations, variations of functionals defining the quality criterion and functional constraints are calculated. With their help the necessary condition of optimality of L.S.Pontryagin's maximum principle type is proved, which has constructive and non-traditional character.

The obtained result can be further used for the study of special regimes.

Key words: Volterra integral equation, L.S. Pontryagin maximum principle, necessary condition of optimality, optimal control, admissible control.

TRAYEKTORIYANIN SAĞ UCU HƏRƏKƏT EDƏN VƏ İNTEQRAL TƏNLİKLƏRLƏ TƏSVİR OLUNAN BİR İDARƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

XÜLASƏ

Volterra tip qeyri-xətti inteqral tənliklərlə təsvir olunan və trayektoriyanın sağ ucunda bərabərsizlik tip funksional məhdudiyyət olan optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Keyfiyyət əlamətini və funksional məhdudiyyətləri göstərən

funksiyalar hamar funksiyalardır. Qoşma sistemlərin analoqları daxil edilərək keyfiyyət funksionalının və bərabərsizlik tipli məhdudiyyətləri verən funksionalların artım düsturları alınır.

Qoşma sistemlər xətti bircins olmayan Volterra tip inteqral tənliklərdir.

İynəvari variasiyalar seriyasından istifadə edilərək keyfiyyət əlamətinin və funksional məhdudiyyətləri verən funksionalların variasiyaları hesablanır. Onların köməyi ilə optimallıq üçün konstruktiv və qeyri-ənənəvi xarakter daşıyan, L.S. Pontryaginin maksimum prinsipi tipli zəruri şərt isbat olunur.

Alınan nəticələr sonralar məxsusi rejimlərin tədqiqi üçün istifadə oluna bilər.

Açar sözlər: Volterra tip imteqral tənliklər, L.S.Pontryaginin maksimum prinsipi, optimallıq üçün zəruri şərt,mümkün idarə, optimal idarə.

Введение

В работах [1-4] и др. рассмотрены различные задачи оптимального управления описываемые интегральными уравнениями типа Вольтерра со свободным правым концом траектории.

В предлагаемой работе изучается случай наличия функциональных ограничений типа неравенств на правый конец траектории в задаче оптимального управления интегральными уравнениями Вольтерра.

Установлено необходимое условие оптимальности первого порядка.

Постановка задачи.

Рассмотрим задачу о минимуме терминального функционала

$$S_0(u)=\varphi_0(x(t_1)), \tag{1}$$

при ограничениях

$u(t)\in U\subset R^r,\ t\in T=[t_0,t_1]$, (2)

$$S_i(u)=\varphi_i(x(t_1))\le 0,\quad i=\overline{1,p}, \tag{3}$$

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} f(t,s,x(s),u(s))ds,\ t\in T. \tag{4}$$

Здесь $\varphi_i(x),\ i=\overline{1,p}$ - заданные непрерывно дифференцируемые скалярные функции, U заданное непустое и ограниченное множество, $f(t,s,x,u)$ – заданная n - мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x, $u(t)$ кусочно-непрерывная (с конечным числом точек разрыва первого рода) $r-$ мерная вектор-функция (доступное управление) .

Предполагается, что каждому доступному управлению $u(t)$ соответствует единственное непрерывное решение $x(t),\ t\in T$ интегрального уравнения (1).

Если решения $x(t),\ t\in T$ уравнения (4) соответствующее доступному управлению $u(t)$ будет удовлетворять ограничениям (3), то такое доступное управление назовем допустимым управлением.

Допустимое управление $u(t)$ доставляющее минимальное значение функционалу (1) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t),\ x(t))$ - оптимальным процессом.

Формула приращения функционалов.

Пусть $(u(t),\ x(t))$ и $(\bar{u}(t)=u(t)+\Delta u(t),\ \bar{x}(t)=x(t)+\Delta x(t))$ - некоторые допустимые процессы.

Введем обозначения

$I(u)=\{i;\varphi_i(x(t))=0,\ i=\overline{1,p}\}$,

$J(u)=\{0\}\bigcup I(u)$

Для простоты изложения будем предполагать, что

$I(u)=\{1,2,.....m;\ m\le p\}$

Запишем приращение функционала $S_i(u)$ соответствующее допустимым управлениям при $i\in J(u)$.

Имеем

$$\Delta S_i(u)=S_i(u+\Delta u)-S_i(u)=\varphi_i(\bar{x}(t_1))-\varphi_i(x(t_1)) \quad (5)$$

Ясно, что приращение $\Delta x(t)$ траектории $x(t)$ является решением уравнения

$$\Delta x(t)=\int_{t_0}^{t}\left[f(t,s,\bar{x}(s),\bar{u}(s))-f(t,s,x(s),u(s))\right]ds \quad (6)$$

Пусть $\psi_i(t), i\in J(u)$ некоторые n- мерные вектор–функции. Из (6) используя формулу Дирихле получаем, что

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\Delta x(t)dt&=\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\left[\int_{t_0}^{t}\left[f(t,\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau))-f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))\right]d\tau\right]dt=\\&=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi'(t)\left[f(\tau,t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))-f(\tau,t,x(t),u(t))\right]d\tau\right]dt\end{aligned} \quad (7)$$

Далее из (6) следует, что

$$\Delta x(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\left[f(t_1,t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))-f(t_1,t,x(t),u(t))\right]dt \quad (8)$$

По формуле Тейлора получаем, что

$$S_i(u+\Delta u)-S_i(u)=\frac{\partial\varphi_i'(x(t_1))}{\partial x}\Delta x(t_1)+o_i(\|\Delta x(t_1)\|) \quad (9)$$

Здесь, и в дальнейшем (') для векторов означает скалярное произведение, а для матриц – операция транспонирование, $\|a\|$ норма вектора $a=(a_1,...a_n)'$ определяемая формулой $\|a\| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$, а $o(a)$ величина более высокого порядка чем a, т.е. $o(a)/a \to 0$ при $a \to 0$.

Учитывая тождества (7) и (8), из формулы приращения (9) будем иметь

$$S_i(u+\Delta u) - S_i(u) = \frac{\partial \varphi_i'(x(t_1))}{\partial x}\left(f\left(t_1, t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right) - f\left(t_1, t, x(t), u(t)\right)\right) + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \psi_i'(t)\Delta x(t)dt - \int_{t_0}^{t_1}\left[\int_t^{t_1}\left[f\left(\tau, t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right) - f\left(\tau, t, x(t), u(t)\right)\right]d\tau\right]dt + o_i\left(\|\Delta x(t_1)\|\right) \qquad (10)$$

Введем обозначения

$$H(t, x(t), u(t), \psi_i(t)) = -\frac{\partial \varphi_i'(x(t_1))}{\partial x} f\left(t_1, t, x(t), u(t)\right) + \int_t^{t_1} \psi_i'(t) f\left(\tau, t, x(t), u(t)\right)d\tau$$

$$\Delta_{\bar{u}} H[t, \psi_i] = H\left(t, x(t), \bar{u}(t), \psi_i(t)\right) - H\left(t, x(t), u(t), \psi_i(t)\right),$$

$$H_x[t, \psi_i] = H_x\left(t, x(t), u(t), \psi_i(t)\right)$$

$$\Delta_{\bar{u}} H_x[t, \psi_i] = H_x\left(t, x(t), \bar{u}(t), \psi_i(t)\right) - H_x\left(t, x(t), u(t), \psi_i(t)\right).$$

Учитывая введенные обозначения и применяя формулу Тейлора после некоторых преобразований из (10) получим

$$S_i(u+\Delta u) - S_i(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}} H[t, \psi_i]dt + \int_{t_0}^{t_1} \psi_i'(t)\Delta x(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} H_x'[t, \psi_i]\Delta x(t)dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}} H_x'[t, \psi_i]\Delta x(t)dt + o_i\left(\|\Delta x(t_1)\|\right) - \int_{t_0}^{t_1} o_i\left(\|\Delta x(t)\|\right)dt \qquad (11)$$

Если предположить, что $\psi_i(t)$ удовлетворяет соотношению

$\psi_i(t) = -H_x[t, \psi_i]$ (12)

то формула приращения (10) примет вид

$$S_i(u+\Delta u) - S_i(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}} H[t, \psi_i]dt + o_1\left(\|\Delta x(t_1)\|\right) - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}} H_x'[t, \psi_i]\Delta x(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} o_2\left(\|\Delta x(t)\|\right)dt, \ i \in J(u) \qquad (13)$$

Необходимое условие оптимальности.

Полученные формулы приращения (13) позволяет сформулировать и доказать необходимое условие оптимальности. Пусть μ произвольное натуральное число, $\theta_j \in [t_0, t_1),\ j = \overline{1, \mu}, (t_0 \le \theta_1 \le \theta_2 \le \ldots \le \theta_\mu < t_1)$ - произвольные точки непрерывности допустимого управления $u(t)$, $l_j \ge 0$, $j = \overline{1, \mu}$ - произвольные числа, $v_j \in U$, $j = \overline{1, \mu}$ -

произвольные векторы, $\varepsilon > 0$ - произвольное достаточно малое число, такое что $\theta_m + l_m\varepsilon \le t_1$, а $\delta u(t_1;\varepsilon,\theta_j,l_j,v_j)$ -игольчатая вариация управления $u(t)$ определяемая по формуле

$$\delta u(t;\varepsilon,\theta_j,l_j,v_j) = \begin{cases} v_j - u(t), \ t \in [\theta_j;\theta_j + l_j\varepsilon) \\ 0, \ \ t \in [t_0;t_1] \setminus [\theta_j;\theta_j + l_j\varepsilon) \end{cases} \quad (14)$$

Специальное приращение допустимого управления $u(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \sum_{j=1}^{\mu} \delta u(t;\varepsilon,\theta_j,l_j,v_j) \quad (15)$$

Суммирование игольчатых вариаций (14) определяется так же как и в работе [5].

Через $\Delta x_\varepsilon(t)$ обозначим специальное приращение траектории $x(t)$ отвечающее приращению (15) управления $u(t)$.

Из оценки установленный например в [6] следует, что

$$\|\Delta x_\varepsilon(t)\| \le L\varepsilon, \ t \in [t_0,t_1) \quad (16)$$

Используя формулы (15) и (16), из формулы приращения (13) получаем, что при $i \in J(u)$

$$S_i(u + \Delta u) - S_i(u) = -\varepsilon \sum_{j=1}^{\mu} l_j \Delta_{v_j} H[\theta_j,\psi_i] + o_1(\varepsilon) \quad (17)$$

С помощью специальной формулы приращения (17) доказывается

Теорема 1. *Для оптимальности допустимого управления* $u(t)$ *в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы для любого натурального числа* μ *неравенства*

$$\min_{i \in J(n)} \sum_{j=1}^{\mu} l_j \Delta_{v_j} H[\theta_j,\psi_i] \le 0 \quad (18)$$

выполнялось для всех $l_j \ge 0, \ \theta_j \in [t_0,t_1), \ v_j \in U, \ j = \overline{1,\mu}$.

По схеме например из работ [5] доказываются, что последовательность необходимых условий оптимальности (18) является следствием следующего утверждения.

Теорема 2. *Для оптимальности допустимого управления* $u(t)$ *необходимо, чтобы неравенство*

$$\min_{i \in J(n)} \sum_{j=1}^{m+1} l_j \Delta_{v_j} H[\theta_j,\psi_i] \le 0$$

выполнялось для всех $l_j \ge 0, \ \theta_j \in [t_0,t_1), \ v_j \in U, \ j = \overline{1,m+1}$.

Доказательство теоремы 2 ведется с рассуждениями аналогичными рассуждениям из [5,7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев А.А. Об условиях оптимальности в одной задаче управления типа Вольтерра // Изв. НАН Азербайджана, Сер. физ.-техн. и матем. наук, 2005, № 2, с. 123-128.
2. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965, 476 с.
3. Винокуров В.Р. Оптимальное управление процессами, описываемыми интегральными уравнениями // Изв. Вузов, математика. 1987, № 8, с. 16-23.
4. Мансимов К.Б., Мустафаев М.Г. Некоторые необходимые условия оптимальности в задачах управления, описываемые системой интегральных уравнений типа Вольтерра // Изв. НАН Азербайджана, Сер. физ.-техн. и матем. наук, 1985, № 5, с. 35-41.
5. Гороховик С.Я. Необходимое условие оптимальности в задаче с подвижным правым концом траектории. // Дифференциальные уравнения. 1975, № 10, с. 1765-1773.
6. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. Баку, Изд-во Элм, 2013, 224 с.
7. Срочко В.А. Условия оптимальности в обыкновенных динамических системах с фазовыми ограничениями типа неравенства. // В сб.:Методы оптимизации и их приложения. Н.Наука, 1982, с.102-111.

UOT: 517.947

BIR SINIF IKINCI TƏRTIB XÜSUSI TÖRƏMƏLI OPERATOR-DIFERENSIAL TƏNLIKLƏRIN BÜTÜN FƏZADA HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

R.F. HƏTƏMOVA
Sumqayıt Dövlət Universiteti
hetemova_roya@mail.ru

XÜLASƏ

Təqdim edilmiş məqalədə bütün R^n fəzasında ikinci tərtib xüsusi törəməli operator-diferensial tənliklərin korrekt həll olunması öyrənilmişdir. Bu məqsədlə əvvəlcə tənliyin baş hissəsinə uyğun tənlik araşdırılmışdır. Baş hissəyə uyğun operatorun $W_2^2\left(R^n;H\right)$ fəzası ilə $L_2\left(R^n;H\right)$ fəzası arasında izomorfizm yaratdığı isbat edilmişdir. Aralıq törəmə operatorlarının normaları qiymətləndirilmişdir. Son nəticədə verilmiş tənliyin korrekt həll olunması üçün əmsallarla ifadə olunan kafi şərtlər tapılmışdır.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, operator-diferensial tənlik, məxsusi ədədlər.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ

РЕЗЮМЕ

В данной статье исследуется корректная разрешимость одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными во всем пространстве R^n. Для этой цели сначала доказывается теорема об изоморфизме оператора главной части уравнения из пространство $W_2^2\left(R^n;H\right)$ на пространства $L_2\left(R^n;H\right)$. Найдена оценки операторов промежуточных производных, используя которых получены достаточные условия для корректной разрешимости уравнения, выраженные коэффициентами уравнения.

Ключевые слова: гильбертово пространство, операторно-дифференциальные уравнение, собственные значения.

ON CORRECT SOLVABILITY ONE CLASS PARTIAL OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION SECOND ORDER IN WHOLE SPACE

ABSTRACT

In this paper the correctly solvability one class of operator-differential equation of second order with partial derivative in whole space R^n is investigated. For this is begining theorem about izomorphisme of head part of equation from space $W_2^2\left(R^n;H\right)$ to space $L_2\left(R^n;H\right)$ is proved. The estimates betwenn derivatives of operators is finding. For this is used sufficiently conditions for correctly solvability of equation which determined with coefficients of equations.

Keywords: Hilbert space, operator-differential equation, eigenvalues.

Tutaq ki, H -separabel Hilbert fəzası, C isə bu fəzada təyin edilmiş öz-özünə qoşma müsbət-müəyyən operatordur. Məlumdur ki, $C^p\left(p \geq 0\right)$ operatorunun təyinolunma oblastı H_p $\left(x, y\right)_{H_p} = \left(C^p x, C_y^p\right)$ skalyar hasilinə nəzərən Hilbert fəzası təşkil edir. Burada $p = 0$ olduqda $H_0 = H$ olduğu qəbul edilir.

$L_2(R^{n};H)$ ilə qiymətləri H fəzasına daxil olan, sanki bütün $x \in R^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ üçün təyin olunmuş $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ vektor-funksiyalarından ibarət Hilbert fəzasını işarə edək. Bu fəzada elementin norması

$$\| f \|_{L_2(R^n;H)} = \left(\int_{R^n} \| f(x_1, x_2, ..., x_n) \|_H^2 \, dx_1 dx_2 ... dx_n \right)^{1/2}$$

kimi təyin edilir.

$D(R^n;H)$ ilə R^n fəzasaında təyin edilmiş, kompakt daşıyıcıya malik olan sonsuz diferensiallanan vektor-funksiyalar çoxluğunu işarə edək. Bu çoxluqda elementin normasını

$$\| u \| = \left(\sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right\|_{L_2(R^n,H)} + \| C^2 u \|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{1/2}$$

kimi təyin edək. Bu normaya görə $D(R^n;H)$ xətti çoxluğunun qapanmasını $W_2^2(R^n;H)$ kimi işarə edək.

H fəzasında aşağıdakı operator-differensial tənliyə baxaq:

$$-\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k^2} + \sum_{m=1}^{n} R_m \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} + Tu(x) + C^2 u(x) = f(x), \quad x \in R^n \quad (1)$$

Burada $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ və $u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ qiymətləri sanki bütün $x \in R^n$ üçün H fəzasına daxil olan vektor-funksiyalardır.

Tənliyin əmsallarının aşağıda göstərilən şərtləri ödədiyini fərz edirik.

1). İstənilən $k = 1, 2... n$ üçün $a_k > 0$;

2). $C - H$ fəzasında təyin edilmiş öz-özünə qoşma müsbət müəyyən operatordur.

3). $R_k \cdot C^{-1} = Q_k$, $k = 1,2,...n$ operatorları H fəzasında məhdud operatorlardır.

4). $T \cdot C^{-2} = F$ operatoru H fəzasında məhdud operatordur.

Tərif 1. Əgər $f(x) \in L_2(R^n;H)$ üçün elə $u(x) \in W_2^2(R^n;H)$ funksiyası varsa ki, (1) tənliyini R^n fəzasında sanki hər yerdə ödəsin, onda $u(x)$ funksiyasına (1) tənliyinin requlyar həlli deyilir.

Tərif 2. Əgər istənilən $f(x) \in L_2(R^n;H)$ üçün (1) tənliyinin requlyar $u(x) \in W_2^2(R^n;H)$ həlli varsa və bu həll üçün

$$\| u \|_{W_2^2(R^n;H)} \le C \cdot \| f \|_{L_2(R^n;H)}$$

qiymətləndirməsi doğru isə, onda (1) tənliyinə korrekt həll oluna bilən tənlik deyilir.

Təqdim olunan işdə (1) tənliyinin korrekt həll oluna bilən olması üçün tənliyin əmsalları ilə ifadə olunan kafi şərtlər tapılmışdır. Qeyd edək ki, $a_k = 1$, $n = 2$ olduqda (1) tənliyi [5] işində baxılmışdır. $a_k = 1$, $n = 2$, C - normal operator olduğu halda oxşar məsələ [6-8] məqalələrində öyrənilmişdir. Xüsusi törəməli yüksək tərtibli operator-differensial tənliklərin birqiymətli, normal və fredholm mənada həll olunan olması məsələləri [1-3] məqalələrində baxılmışdır.

Aşağıdakı işarələri qəbul edək:

$$L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=-\sum_{k=1}^{n}a_k\,\frac{\partial^2 u(x)}{\partial_k^2}+C^2u\,(x),\quad u(x)\in W_2^2\left(R^n;H\right)$$

$$L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=\sum_{m=1}^{n}R_m\,\frac{\partial u}{\partial x_k}+Tu,\quad u(x)\in W_2^2\left(R^n;H\right)$$

Əvvəlcə

$$L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=-\sum_{k=1}^{n}a_k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}+C^2u=f(x),\quad x\in R^n \quad (2)$$

tənliyinin həllolunma məsələsini araşdıraq.

Aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 1. Tutaq ki, $a_k>0$ və C - öz-özünə qoşma müsbət-müəyyən operatordur. Onda (2) tənliyi korrekt həll olunandır.

İsbatı. $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiyasının Furye çevirməsini $\tilde f(\xi)\,\tilde f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ ilə işarə edək.

$$u(x)=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n}\hat u(\xi)\,\ell^{-i(x,\xi)}d\xi \quad (3)$$

qəbul edək, burada $\hat u(\xi)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,\xi_k^2+C^2\right)^{-1}\tilde f(\xi)$, $(x,\xi)=x_1\xi_1,x_2\,\xi_2+\ldots+x_n\,\xi$.

Göstərə bilərik ki, (3) düsturu ilə təyin olunan $U(x)$ funksiyası R^n-də sanki hər yerdə (1) tənliyini ödəyir. Göstərək ki, $u(x)\in W_2^2\left(R^n;H\right)$. Bunun üçün əvvəlcə.

$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k^2}\in L_2\left(R^n;H\right),\ C^2u(x)\in L_2\left(R^n;H\right)$ olduğunu göstərək. Planşerel teoreminə görə $\xi^2\hat u(\xi)\in L_2\left(R^n;H\right)$ və $C^2\hat u(\xi)\in L_2\left(R^n;H\right)$ olduğunu göstərmək kifayətdir.

Aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\begin{aligned}\left\|\xi_x^2\hat u(\xi)\right\|_{L_2\left(R^n;H\right)}&=\left\|\xi_k^2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,\xi_k^2+c^2\right)^{-1}\hat f(\xi)\right\|_{L_2\left(R^n;H\right)}\le\\&\le\sup_{\xi\in R^n}\left\|\xi_k^2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,\xi_k^2+C^2\right)^{-1}\right\|\cdot\left\|\hat f(\xi)\right\|_{L_2\left(R^n;H\right)}\end{aligned}\quad (4)$$

Digər tərəfdən C operatorunun spektral ayrılış düsturuna görə istənilən $\xi\in R^n$ üçün alarıq:

$$\begin{aligned}\left\|\xi_k^2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,\xi_k^2+c^2\right)^{-1}\right\|&=\sup_{\mu\in\sigma(c)}\left|\xi^2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,\xi^2+\mu^2\right)^{-1}\right|\le\\&\le\sup_{\mu\in\sigma(c)}\left|\xi_k^2\left(\xi_k^2\cdot a_k+\mu^2\right)^{-1}\right|\le_k^{-1},\ k=1,2,\ldots n\end{aligned}$$

Onda (4) bərabərsizliyindən alarıq ki,

$$\left\|\xi_k^2\tilde{u}(\xi)\right\|_{L_2(R^n;H)} \le a_k^{-1}\left\|\tilde{f}(\xi)\right\|_{L_2(R^n;H)} = a_k^{-1}\left\|f(x)\right\|_{L_2(R^n;H)}, \quad (5)$$

başqa sözlə, $\xi^2\tilde{u}\,(\xi)\in L_2(R^n;H)$, $k=1,2...n$ alarıq.

Digər tərəfdən

$$\left\|C^2\,\tilde{u}(\xi)\right\|_{L_2(R^n;H)} = \left\|C^2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\,\xi_k^2 + C^2\right)^{-1}\tilde{f}(\xi)\right\|_{L_2(R^n;H)} \le$$

$$\le \sup_{\xi\in R^n}\left\|C^2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\,\xi_k^2 + C^2\right)^{-1}\right\|\cdot\left\|\tilde{f}(\xi)\right\|_{L_2(R^n;H)}. \quad (6)$$

Spektral ayrılış düsturundan istifadə etməklə istənilən $\xi\in R^n$ üçün alarıq:

$$\left\|C^2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\,\xi_k^2 + C^2\right)^{-1}\right\| \le \sup_{\mu\in\sigma(c)}\left\|\mu^2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\,\xi_k^2 + \mu^2\right)^{-1}\right\| < 1,$$

nəticədə (6) bərabərsizliyindən

$$\left\|C^2\,\tilde{u}(\xi)\right\|_{L_2(R^n;H)} \le \left\|f\right\|_{L_2(R^n;H)} \quad (7)$$

alırıq. Son nəticədə (5) və (7) bərabərsizliklərindən $u(x)\in W_2^2(R^n;H)$ və

$$\left\|u\right\|^2_{W_2^2(R^2;H)} = \sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k^2}\right\|^2_{L_2(R^n;H)} + \left\|C^2\,u\,(x)\right\|_{L_2(R^n;H)} =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left\|\xi_k^2\,u\,(\xi)\right\|^2_{L_2(R^n;H)} + \left\|C^2\,\hat{u}\,(\xi)\right\|^2_{L_2(R^n;H)} \le \left(a_k^{-2}+1\right)\left\|f\right\|^2_{L_2(R^n;H)}$$

olduğunu alırıq. Bu bərabərsizlik (1) tənliyinin korrekt həll oluna bilən olmasını göstərir. Teorem isbat olundu.

İndi isə aralıq törəmə operatorları adlanan ifadələrin normasının qiymətlən-dirilməsi haqqında aşağıdakı teoremi isbat edək:

Teorem 2. Tutaq ki, $u(x)\in W_2^2(R^n;H)$. Bu halda aşağıdakı bərabərsizliklər

doğrudur:

$$\left\|C\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right\|_{L_2(R^n;H)} \le C_k\left\|L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u\right\|_{L_2(R^n;H)}, \quad k=1,2...n$$

$$\left\|C^2u(x)\right\|_{L_2(R^n;H)} \le C_0\left\|L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u\right\|_{L_2(R^n;H)}$$

burada $C_k = a_k^{-1}$, $C_0 = 1$, $k=1,2,...n$.

İsbatı. Tutaq ki, $u(x)\in W_2^2(R^n;H)$ $\quad L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = f$ işarə etsək alarıq:

$$u(x) = \frac{1}{(\pi)^{n/2}} \int_{R^n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k C_k^2 \right)^{-1} \tilde{f}(\xi) \ell^{i(x,\xi)} d\xi$$

Planşerel teoreminə görə yaza bilərik:

$$\left\| C \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right\|_{L_2(R^n;H)} = \| \xi_k C \tilde{u}(\xi) \|_{L_2(R^n;H)} =$$

$$= \left\| \xi_k \cdot C \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^2 + C^2 \right)^{-1} \tilde{f}(\xi) \right\|_{L_2(R^n;H)} \leq \quad (8)$$

$$= \sup_{\xi \in R^n} \left\| \xi_k C \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^2 + C^2 \right)^{-1} \right\| \cdot \| \tilde{f}(\xi) \|_{L_2(R^n;H)}$$

İstənilən $\xi \in R^n$ üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\left\| \xi_k \cdot C \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^2 + C^2 \right)^{-1} \right\|_H = \sup_{\mu \in \sigma(c)} \left| \xi_k \mu \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^2 + \mu^2 \right)^{-1} \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\mu \in \sigma(c)} \left| \xi_k \mu \left(a_k \xi_k^2 + \mu^2 \right)^{-1} \right| \leq \sup_{\mu \in \sigma(c)} \left| a_k^{-\frac{1}{2}} \cdot a_k^{\frac{1}{2}} \xi_k \mu \left(a_k \xi_k^2 + \mu^2 \right)^{-1} \right| \leq$$

$$\leq a_k^{-\frac{1}{2}} \sup_{\mu \in \sigma(c)} \left| a_k^{\frac{1}{2}} \xi_k \mu \left(a_k \xi_k^2 + \mu^2 \right)^{-1} \right| \leq$$

$$\leq a_k^{-\frac{1}{2}} \sup_{\mu \in \sigma(c)} \left| \frac{1}{2} \left(a_k \xi_k^2 + \mu^2 \right) \left(a_k \xi_k^2 + \mu^2 \right)^{-1} \right| \leq \frac{1}{2} a_k^{-\frac{1}{2}},$$

Nəticədə

$$\left\| C \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|_{L_2(R^n;H)} \leq \frac{1}{2} a_k^{-\frac{1}{2}} \| f \|_{L_2(R^n;H)} \quad (9)$$

alarıq.

Digər tərəfdən alarıq:

$$\| C^2 u(x) \|_{L_2(R^n;H)} = \| C^2 \tilde{u}(\xi) \|_{L_2(R^n;H)} = \left\| C^2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^2 + C^2 \right)^{-1} \tilde{f}(\xi) \right\|_{L_2(R^n;H)} \leq$$

$$\leq \sup_{\xi \in R^n} \left\| C^2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^2 + C^2 \right)^{-1} \right\| \cdot \| \tilde{f}(\xi) \|_{L_2(R^n;H)} = \quad (10)$$

$$= \sup_{\xi \in R^n} \left\| C^2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^2 + C^2 \right) \right\| \cdot \| f(x) \|_{L_2(R^n;H)}^2.$$

C operatorunun spektral ayrılışından istifadə etsək istənilən $\xi \in R^n$ üçün alarıq:

$$\left\| C^2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^2 + C^2 \right)^{-1} \right\| = \sup_{\mu \in \sigma(c)} \left\| \mu^2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^2 + \mu^2 \right)^{-1} \right\| \leq 1.$$

Onda (10) bərabərsizliyindən alarıq:

$$\| C^2 u\,(x) \|_{L_2(R^n;H)} \le \| f \|_{L_2(R^n;H)} .$$

Əgər $f(x)=L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)$ olduğunu nəzərə alsaq teoremin hökmünün doğru olduğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

İndi isə (1) tənliyinin korrekt həll oluna bilməsi haqqında teoremi isbat edək.

Teorem 3. Fərz edək ki, girişdə göstərilən 1). - 4). şərtləri ödənilir, belə ki, Q_k və F operatorları üçün

$$q=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^{-\frac{1}{2}}\cdot\| Q_k \| + \| F \| < 1$$

şərti ödənilir.

Bu halda (1) tənliyi korrekt həll olunandır.

İsbat. (1) tənliyini aşağıdakı şəkildə göstərək:

$$L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u+L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=f\,(\,x\,),\quad x\in R^n$$

burada $f(x)\in L_2\left(R^n;H\right)$, $u(\,x\,)\in W_2^2\left(R^n;H\right)$.

Teorem 1-dən alınır ki, $L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ operatoru $W_2^2\left(R^n;H\right)$ fəzasını $L_2\left(R^n;H\right)$ fəzasına izomorf inikas etdirir.

Əgər $L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=\omega(x)$ işarə etsək, belə ki, $\omega(\,x\,)\in L_2\left(R^n;H\right)$, aşağıdakı tənliyi ala bilərik:

$$\omega\,(x)+L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot L_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\omega(x)=f\,(x)$$

Bu tənliyi $L_2\left(R^n;H\right)$ fəzasında

$$\left[E+L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot L_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\omega\,(x)=f\,(x)$$

operator tənliyi şəklində göstərə bilərik.

$L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ operatorunun izomorfizmindən istifadə edərək istənilən $\omega(x)\in L_2\left(R^n;H\right)$ üçün alarıq:

$$\left\| L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)L_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\omega(x)\right\|_{L_2(R^n;H)}=\left\| L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u\,(x)\right\|_{L_2(R^n;H)}=\left\|\sum_{k=1}^{n}R_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+F\,u\right\|_{L_2(R^n;H)}\le\sum_{k=1}^{n}\left\| R_k C^{-1}\right\|\cdot\left\| C\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L_2(R^n;H)}+$$

$$+\left\| T\cdot C^{-2}\right\|\cdot\left\| C^2 u\right\|_{L_2(R^n;H)}\le\sum_{k=1}^{n}\| Q_k\|\cdot\left\| C\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L_2(R^n;H)}+\left\| F\,C^{-2}\right\|\cdot\left\| C^2 u\right\|_{L_2(R^n;H)}.$$

Aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi haqqında Teorem 2-dən istifadə etsək, alarıq:

$$\left\| L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\|_{L_2(R^n;H)} \le \sum_{k=1}^{n} \| Q_k \| \cdot \frac{1}{2} a_k^{-1} \left\| L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u \right\|_{L_2(R^n;H)} +$$

$$+\| F \| \cdot \left\| L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\|_{L_2(R^n;H)} = \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^{-\frac{1}{2}} \cdot \| Q_k \| + \| F \|\right) \left\| L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u\right\|_{L_2(R^n;H)} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^{-\frac{1}{2}} \cdot \| Q_k \| + \| F \|\right) \| \omega(x) \|_{L_2(R^n;H)} = q \| \omega(x) \|_{L_2(R^n;H)}.$$

Teoremin şərtinə görə $q<1$ olduğundan $E+L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)L_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ operatorunun $L_2\left(R^n;H\right)$ fəzasında kəsilməz tərs operatorunun olduğunu alırıq.

Nəticədə

$$\omega(x) = \left[E + L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]^{-1} f(x)$$

yaxud

$$u(x) = L_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[E + L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]^{-1} f(x)$$

olduğunu alarıq. Buradan isə

$$\| u \|_{W_2^2(R^n;H)} \le const \| f \|_{L_2(R^n;H)}$$

olduğunu alarıq. Bu isə (1) tənliyinin korrekt həll oluna bilməsini göstərir.

Teorem 3 isbat olundu.

Sonda məqalədə həll edilən məsələnin qoyuluşuna və məsələnin həlli zamanı göstərdiyi köməyə görə elmi rəhbərim professor H.İ.Aslanova öz dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

ƏDƏBİYYAT

1. Асланов Г.И. О разрешимости и асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Успехи мат. наук, 1993, вып. 4, с. 172 - 173.

2. Асланов Г.И. О разрешимости операторно-дифференциальных уравнений с частными производными в гильбертовом пространстве и некоторых их приме-нениях. Изв. АН Азерб. ССР серия физ. техн. и матем. наук, том XVIII, № 4-5, 1997 г., с. 9 - 14.

3. Aslanov G. I. Normal solvability of operator-differential equations with partial derivatives in Hillbert space. Proceedings of IMM NAS Azerbaijan, vol. XII, 2000, p. 21-25

4. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения, Мир., 1971, 371 с.

5. Мирзоев С.С. Об одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка Труды ИММ АН Азерб., 1998, т. 7 (16), с. 154 – 161.

6. Мирзоев С.С., Джафаров И. Дж. О разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Матем. заметки, 2012 г., т. 91, №3, с. 470 – 472.

7. Jafarov I.J. On solvability of one class of partial operator-differential equations, Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan, 2004, vol. 20, p. 57-62.

8. Mirzoev S.S., Jafarov I.J. On solvability of one boundary value problem for second order operator-differential equations, Transactions of NAS of Azerbaijan issue mathematics and mechanics, series physical-technical and mathematics sciences, 2004, vol. 24, No1, p. 177-186.

2023. Volume 7, Number 1 Pages 47-58

UOT: 004

THE CLOUD SERVICE SECURITY ISSUE RISK EVALUATION: CASE OF AZURE AND MICROSOFT 365

MEKHIRIBAN FATTAKHOVA, SAMUR AHMADOV

Department of Computer Technologies,

Azerbaijan Technical University

meri-fattah@mail.ru, samur2552@gmail.com

ABSTRACT

The research relevance is determined by the fact that at the moment many cloud services have been formed and gained popularity, and the issue of security of personal data stored and processed on services of this type requires a comprehensive and detailed study. The research aims to analyse and evaluate the security of using cloud technologies in general, and the security systems of cloud services Azure and Microsoft 365 in particular, and then describe the problems encountered in evaluating the security of these services. The following general scientific methods were used to conduct the study: analysis, comparison, induction, and generalisation. The study obtained data on general cloud security vulnerabilities, security elements and issues of two specific cloud services Azure and Microsoft 365, including their security or regulatory embedded applications, and external and internal security threats. The study also identified and described the problems related to the security assessment of the investigated cloud services. The study analysed and summarised information related to the security systems of information systems such as cloud services, focused on existing or potential threats and presented an analysis of the emerging challenges in their assessment. The information obtained from the study can be applied to improve the security of cloud technologies, assess the security of various cloud services, and consider the challenges associated with such an assessment.

Keywords: System vulnerability, internal and external threats, Personal data, Information processing and storage, Internet traffic tracking and regulation.

BULUD XIDMƏTI TƏHLÜKƏSIZLIYI PROBLEMI RISKININ QIYMƏTLƏNDIRILMƏSI: AZURE VƏ MICROSOFT 365 NÜMUNƏSI

XÜLASƏ

Tədqiqatın aktuallığı onunla müəyyən edilir ki, hazırda bir çox bulud xidmətləri formalaşıb və populyarlıq qazanıb və bu tip xidmətlərdə saxlanılan və emal olunan şəxsi məlumatların təhlükəsizliyi məsələsi hərtərəfli və ətraflı araşdırma tələb edir. Tədqiqatın məqsədi ümumilikdə bulud texnologiyalarından və xüsusilə Azure və Microsoft 365 bulud xidmətlərinin təhlükəsizlik sistemlərindən istifadənin təhlükəsizliyini təhlil etmək və qiymətləndirmək və sonra bu xidmətlərin təhlükəsizliyini qiymətləndirərkən yaranan problemləri təsvir etməkdir. Tədqiqatın aparılması üçün aşağıdakı ümumi elmi metodlardan istifadə edilmişdir: təhlil, müqayisə, induksiya və ümumiləşdirmə. Tədqiqat ümumi bulud təhlükəsizliyi zəiflikləri, təhlükəsizlik elementləri və iki xüsusi bulud xidməti, Azure və Microsoft 365 üçün problemlər, o cümlədən onların daxili təhlükəsizlik və ya uyğunluq proqramları, həmçinin xarici və daxili təhlükəsizlik təhdidləri haqqında məlumat əldə edib. Tədqiqat həmçinin tədqiq olunan bulud xidmətlərinin təhlükəsizliyinin qiymətləndirilməsi ilə bağlı problemləri müəyyən edib və təsvir edib. Tədqiqat bulud xidmətləri kimi informasiya sisteminin təhlükəsizlik sistemləri ilə bağlı məlumatları təhlil edir və ümumiləşdirir, mövcud və ya potensial təhlükələrə diqqət yetirir və onların qiymətləndirilməsində yaranan problemlərin təhlilini təqdim edir. Tədqiqat nəticəsində əldə edilən məlumat bulud texnologiyalarının təhlükəsizliyini yaxşılaşdırmaq, müxtəlif bulud xidmətlərinin təhlükəsizliyini qiymətləndirmək və bu cür qiymətləndirmə ilə bağlı problemləri nəzərdən keçirmək üçün istifadə edilə bilər.

Açar sözlər: Sistem zəifliyi, daxili və xarici təhdidlər, Fərdi məlumatlar, İnformasiyanın emalı və saxlanması, İnternet trafikinin monitorinqi və tənzimlənməsi.

ОЦЕНКА РИСКА ПРОБЛЕМЫ БЕЗОПАСНОСТИ ОБЛАЧНОЙ СЛУЖБЫ: ПРИМЕР AZURE И MICROSOFT 365

РЕЗЮМЕ

Актуальность исследования определяется тем, что на данный момент сформировались и завоевали популярность многие облачные сервисы, а вопрос безопасности персональных данных, хранящихся и обрабатываемых на сервисах такого типа, требует всестороннего и детального изучения. Целью исследования является анализ и оценка безопасности использования облачных технологий в целом и систем безопасности облачных сервисов Azure и Microsoft 365 в частности, а затем описание проблем, возникающих при оценке безопасности этих сервисов. Для проведения исследования были использованы следующие общенаучные методы: анализ, сравнение, индукция и обобщение. В ходе исследования были получены данные об общих уязвимостях облачной безопасности, элементах безопасности и проблемах двух конкретных облачных сервисов Azure и Microsoft 365, включая их встроенные приложения для обеспечения безопасности или нормативных требований, а также внешние и внутренние угрозы безопасности. В ходе исследования также были выявлены и описаны проблемы, связанные с оценкой безопасности исследуемых облачных сервисов. В исследовании проанализирована и обобщена информация, касающаяся систем безопасности информационных систем, таких как облачные сервисы, сосредоточена на существующих или потенциальных угрозах и представлен анализ возникающих проблем при их оценке. Информация, полученная в результате исследования, может быть применена для повышения безопасности облачных технологий, оценки безопасности различных облачных сервисов и рассмотрения проблем, связанных с такой оценкой.

Ключевые слова: Уязвимость системы, внутренние и внешние угрозы, Персональные данные, Обработка и хранение информации, Отслеживание и регулирование интернет-трафика.

Introduction. Cloud computing technology has been spreading all over the world for quite a long time, including large corporations whose activities are related to data processing, storage, and transmission. According to some scientists such as D. Grispos, W.B. Glisson and T. Storer [1], the business world has been increasingly adopting cloud computing. They cite in their research that according to Ernst and Young's 2011 Global Information Security Survey, 36% of respondents have used cloud computing services, up from 23% in 2010. It further states that 25 per cent of respondents are considering using cloud services shortly. Researchers also cite AMD's Global Cloud Computing Study, which found that in 2013, 37% of surveyed firms worldwide deployed applications or stored data in cloud environments, indicating a trend that took shape more than 10 years ago. Cloud computing services are also being used by governments around the world in an attempt to cut costs and improve the efficiency of their agencies. It was predicted that the US federal government would save $10 billion in IT costs by moving government services to cloud computing. Yet, after so many years, the issue of cloud service security has not lost its relevance. A decade has passed and most of the problems have been fixed, but there are still issues to consider.

The topic of cloud services in Azerbaijan is relevant, which is confirmed by recent studies of T. A. Askerova [2] on the benefits of using cloud technologies in educational institutions, as well as the study of I. Seidova and D. Karatova [3] on firewalls of different types, including cloud firewalls. In these studies, among other things, cloud services are noted to represent a new level of data organisation, with the help of which geographical and social barriers are overcome. Despite this, an aspect of the problems of evaluating their security remains understudied, which is the main motivation for scientific research and filling this gap in theoretical information. The Institute of Information Technologies of the National Academy of Sciences of Azerbaijan plays a leading role in research in the field of information technologies. The Institute researches the problems of information security, intellectual analysis of the electronic state, and security of cloud technologies. Among the achievements it should be noted that models and methods of designing distributed systems of information processing in computer networks, and algorithms of security of distributed virtual computing environments such as cloud services have been developed [4]. According to the data given in the study of G. Ch. Nabibekova, K. G. Dashdamirova [5] on the formation of the information society in Azerbaijan, now the Institute continues research in the field of the Fourth Industrial Revolution (Industry 4.0).

According to research conducted in 2022 under the auspices of the United Nations Development Programme, the field of cloud services is not only of interest to the scientific community but has also received significant support from the Azerbaijani government. At the initiative of the government, data from all government organisations is being migrated to a centralised government cloud service to ensure better management and security, and to reduce costs. Starting with government organisations with small to medium-sized operations, there is a gradual transition to the nationwide cloud. Once the transition is successful, the next phase of the programme will include larger government organisations. "Azintelecom Cloud" [6] is Azerbaijan's nationwide cloud with a high level of trust, as it already hosts government-critical data. It is also worth noting that the State Agency for Special Communication and Information Security acts as a domain name registrar for the government, and maintains *DNS* servers (*Domain Name System*) of the ".gov.az." domain zone, which is official for all government organisations [7].

Cloud computing or "Cloud" technology opens new horizons for information technology. Remote data storage, information processing on cloud servers, ubiquitous accessibility with Internet access - all these are positive aspects of a new, rather young technology that provides opportunities and conveniences for users. The purpose of this study is to analyse cloud security and to address the challenges associated with the issue of security assessment of disparate and globally distributed cloud service systems.

Materials and methods. General scientific methods such as analysis, induction, comparison, and generalisation were used to conduct the study of cloud service security. The study examined general issues related to the security systems of cloud technologies and cloud services, such as the reliability of these systems, security against unauthorised interference in the operation of the service, security against access to user data or service data by outsiders or intruders, and security of data storage, processing, and transmission. Further, the security systems, their components, and vulnerabilities, of cloud services such as Microsoft Azure and Microsoft (Office) 365 were examined separately and in more detail. After the study, the cloud services were compared and evaluated on several factors. Subsequently, conclusions were drawn on the problems encountered in conducting the security assessment of the cloud services.

The analysis, a general logical method, was applied to separate information about cloud technologies, a rather broad area of information technology, from data directly related to the security systems of cloud services such as Azure and Microsoft 365. In the course of the analysis, research materials such as reports on the practical application of cloud services [7] were used, which were studied in detail, and based on the obtained data it was possible to separately and, in more detail, consider the use of cloud services and their implementation in the state structures of Azerbaijan.

Induction, a general logical method, was applied to investigate and systematise all the information provided by the various materials and data collected about cloud services in general, and specifically about Azure and Microsoft 365 cloud services, to provide a conclusion about the security systems of cloud services and the typical problems of security assessment in this type of systems. Induction was also applied to describe the general opinion of the researchers and the positions expressed in their robots regarding the cloud technologies themselves and cloud services such as Azure and Microsoft 365 and the security of their use.

The comparison method was used to focus on the key vulnerabilities of cloud security systems and cloud services. The security systems of Azure and Microsoft 365 cloud services were examined in detail and contrasted against each other on several factors such as the security of data storage, the lack of vulnerabilities in individual elements of the system and its overall security. Subsequently, based on data obtained through other methods such as analysis and induction, an appropriate table was compiled to compare and evaluate them more accurately.

Generalisation, a theoretical method, was used during the writing of the conclusions of the study, which also included data on the problems of evaluating the security of cloud services that were encountered during the study. Generalisation was also used to describe the general state of the field of cloud technologies and cloud security systems and to describe the positions expressed by researchers in other papers.

Results. Advances in cloud technology and increasing globalisation have led to rising customer expectations regarding the availability and efficiency of information services provided by large companies. The management teams of such organisations are increasingly interested in how cloud computing can best meet these needs and also minimise or eliminate the high upfront costs associated with technical support. Cloud technologies are also tasked with improving performance, guaranteeing a higher return on investment, providing dynamic training, and providing pay-as-you-go services [8].

Cloud computing has simplified some IT processes and raised new security concerns. Since different types of data in cloud services are scattered across the network and stored in different cloud services, many unique vulnerabilities can be exploited by attackers. Table 1 shows the three cloud security sectors where vulnerabilities occur most frequently [9].

Table 1. Challenging cloud security sectors

Network	Data storage	User safety
Attack prevention	Metadata	Identification
Firewall	Data storage	Authentication
Data security audit	Data management	Authorization

Network vulnerability given that cloud computing is based on processing information on remote servers, serious security issues arise. Networks face numerous security challenges in the real world. Using the services and protections provided by standard and cloud technologies, network administrators must comply with the relevant security standards. Unfortunately, vulnerabilities in network protocols, various types of attacks: *DDoS* (*Distributed Denial of Service*) and *MITM* (*Man In The Middle*; a middleman attack), attacks on web services, *SLA* (*Service Level Agreement*) and DNS [10]; pose a serious threat to services and data stores. The simplest means of preventing attacks are firewalls. It is also worth noting that cloud firewalls as a service are comparable to traditional firewalls. The natural advantage of a cloud firewall is its independence from the physical location of the server. The service works on any network because it is hosted in the cloud. Data security audits present a different way of preventing attacks by checking different elements of the cloud service system. They are conducted for end users, servers, and routers of cyberspace in the cloud.

Data Warehouse Vulnerability. The growing popularity of cloud computing has led to significant development of metadata. Metadata can contain a variety of information: what was done, where it was done, the format of the data, and other forms of information. From a security perspective, metadata should be encrypted because it can contain personal and sensitive information. Unwanted access to sensitive data can be restricted by using a *VPN* (*Virtual Private Network*). A digital archive hosted in the cloud contains information related to a specific element of the cloud service or the personal data of the user. The physical storage of data takes place on numerous servers, each managed and maintained by a different web hosting company. To store data in a secure and accessible manner, distributed computing systems are becoming increasingly necessary to power complex disparate information systems. Problems with data management have led directly to concerns about the security of systems in general, including services whose activities are directly related to the storage, access, and privacy of information.

User data vulnerability. There is a significant security risk associated with cloud service providers tracking data sent by users while it is being processed and stored. The cloud service security system can recognise and validate data automatically, grant access to new users and monitor connections. The process of user interaction with the cloud service security system can be divided into three stages: identification, authentication, and authorisation.

Identification. Identity - the recognition of a user by the security system of a cloud service by their identifier. Identity access management systems must take all necessary precautions to ensure the security of user credentials during recording and storage and to prevent unwanted access to these credentials. The identity management system of an individual cloud service serves as a catalogue of the users who use its services and provides extensive capabilities for classifying them and identifying questionable and insecure connections.

Authentication. Authentication is the verification of a user's identity. Automated cloud service security protocols can perform partial or full authentication. A basic authentication method in the context of cloud computing prevents access to a cloud service without confirming the identity of the user. Such confirmation can be a nickname, password, email address, or mobile phone number. The advanced verification method involves requesting various additional actions to authenticate the user: confirmation by calling a mobile number, sending an email and other more complex methods. These methods fall into two main categories, namely physical authentication (using a hardware key) and digital authentication (using a digital signature).

Authorisation. The authorisation is the user's admission to the cloud service, the final stage of user interaction with the cloud service security system. At this point, the provided information and connection security are checked, after which authorised, users have access to the management and use of available resources and services of the cloud service, to user data stored in the cloud storage.

Thus, having studied the common security issues of cloud services and having identified three sectors to focus on, the security systems of Azure and Microsoft 365 cloud services were examined. Since both services are owned by Microsoft, they have similar security issues, and it will be advisable to first highlight the identified characteristic security aspects of each cloud service and then address the vulnerabilities that are common to these security systems.

Microsoft Azure. The Azure cloud service is a cloud computing platform managed by Microsoft that provides access, management and development of applications and services through international data centres. This cloud computing platform codenamed Project Red Dog was introduced at the Professional Developers Conference in October 2008. In February 2010, it was officially introduced as Windows Azure and the name was changed to Microsoft Azure on 25 March 2014. *SaaS* (*Software as a Service*), *PaaS* (*Platform as a Service*) and *IaaS* (*Infrastructure as a Service*) are just some of the features that Microsoft Azure provides. In addition to applications and systems from Microsoft and others, Azure also supports a wide range of programming languages, tools, and platforms. In the following, the data obtained in the course of the research about the security system of Microsoft Azure cloud service [11] will be discussed.

Access Control. Single sign-on and multi-factor authentication capabilities are available using Azure Active Directory. This Azure Active Directory supports the technology stack, which is a set of technologies required to build software that can interoperate with Microsoft products. With the features of this directory, organisations can administer user accounts, including external users, customers, and partners. Azure Active Directory can also create isolated user roles based on the separation of access rights and responsibilities.

Security and data management. Azure Security Centre provides cloud users with the resources and tools they need to protect their accounts, monitor them, and communicate securely. Azure Defender helps scan and assess vulnerabilities in the cloud environment. Azure also provides tracking of changes to the cloud by the user, to prevent unauthorised access and encryption of the cloud disk, storage service, client-side, and server-side. Microsoft Azure cloud service does not offer any tools to help cloud users share their data in the cloud.

Microsoft (Office) 365. Microsoft Corporation owns the Microsoft 365 product line, which consists of cloud services, productivity software, and team collaboration tools. It includes online tools such as Outlook.com, OneDrive and Microsoft Teams, as well as software packages previously sold under the Microsoft Office brand. These include Word, Excel, PowerPoint, and Outlook for Microsoft Windows, macOS, mobile devices and the web, as well as enterprise products and services such as Exchange Server, SharePoint, and Yammer. The Microsoft 365 line-up includes subscription-based licensing for desktop and mobile apps, hosted email, and intranet services, as well as subscription plans that cover all of these elements. The following will discuss the study's findings about the security of the Microsoft 365 cloud service [12].

For Microsoft 365, as the product that more clearly inherits Microsoft's security policy issues, there are inherent problems in the following issues: unauthorised access, credential attacks, data leakage and loss, email security, and file sharing security.

Unauthorised access and credential attacks. Employee access to Microsoft Office applications is a basic idea that many companies adhere to, but unrestricted access compromises cybersecurity. Giving employees access to more information than they need can inadvertently give hackers access to a lot of personal information. However, hackers aren't the only danger.

Former employees can continue to use the programs unless their rights are removed, as the Office 365 suite is in the cloud and can be accessed from anywhere. Microsoft Office 365 login credentials can also create a situation for a serious data breach. Since the Office 365 suite is popular among users, hackers are prioritising Microsoft Office as a target for phishing attacks. Attackers can gain access to a user's OneDrive files, SharePoint folders and Microsoft 365 mailbox by obtaining login credentials.

Email and file sharing security. Many attacks use an organisation's email system as the first point of access. When a user opens an attachment or clicks a link in an email containing malware, then spam and other malicious emails begin to target the company's network. An employee only needs to click once to completely bring down their company's network. Although Microsoft 365 comes with built-in malware protection, having additional protection points increases overall security. Microsoft also creates collaborative and productive technologies. Collaboration requires file sharing, but it also involves commercial risk and should be treated as such. File sharing is made possible by Microsoft SharePoint, OneDrive, Microsoft Teams, and Microsoft 365 Groups technologies. While all of these solutions are used for internal sharing, some support external file sharing. Internal sharing alone accounts for 60 per cent of business file sharing. Therefore, even though files can be shared externally, the main security issue with Microsoft 365 is probably internal. Sharing the wrong files with the wrong people, or even matching files with the wrong people, can cause security problems.

Data leakage and loss. Businesses can store a lot of data in the cloud with Microsoft Office 365 and other similar solutions, and they also have easy access to that data. Users can easily communicate with each other thanks to Microsoft Office tools including OneDrive, SharePoint, Teams, and Outlook. However, the ease of data access can sometimes lead to data leaks, intentional or unintentional, which can be detrimental to the firm. Many factors such as user error, cyber-attacks through an organisation's network or even a third-party system can cause data loss.

Thus, after reviewing the security systems of Azure and Microsoft 365 cloud services, a comparative table can be drawn up (Table 2) and the security issues common to them, as Microsoft products, can be highlighted:

- the insufficient quality level of inbuilt intrusion detection systems;
- access to many applications through a single account;
- presence of poor-quality updates.

Table 2. Comparison of Azure and Microsoft 365 cloud security systems

Evaluation factors	Microsoft Azure	Microsoft (Office) 365
Data storage security	7/10	5/10
Absence of vulnerabilities in individual elements of the system	8/10	6/10
Overall security	7/10	7/10

After conducting a detailed study of the security systems of cloud services, Microsoft Azure and Microsoft (Office) 365 services, it is possible to move on to consider the problems encountered during the research and evaluation process.

The main challenge for the study was the low availability of information. Most of the information about cloud security systems that is available for review is presented in such a way that the data provided to users does not jeopardise the security systems. It is only possible to get a general overview of these systems, and potential threats can be judged based on the sectors in the defence where vulnerabilities are most likely to occur and the shortcomings of cloud service updates. Much of the information in the public domain is limited to a statement about the existence of a security system or a warning of a potential or existing threat, the details of which are not specified for security reasons. Security studies that are conducted for such services could provide more detailed information, but access to this data is also restricted. The remaining independent investigations are rarely clearer, and their reflections are questioned in terms of the veracity and credibility of the claims provided. Thus, information about the real state of security systems of cloud services is concealed by corporations and the companies that own them to secure these systems.

Discussion. Data obtained from the study of cloud security. This study was able to identify three sectors of cloud security where security issues are encountered. These sectors were: network, data storage and user security. The network vulnerabilities were emphasised in aspects such as attack prevention, firewall usage, and data security auditing. In data warehouse vulnerabilities, the focus was on issues such as metadata security, data storage security, and data management. In user data vulnerabilities, the key steps of the user's cloud service security walkthrough were addressed such as identification, authentication, and authorisation.

In the reviewed literature, different views have been presented on the allocation of certain cloud service security sectors. A joint study of a cloud computing environment and its security conducted by M. F. Mushtaq, U. Akram, I. Khan, S.N. Khan, A. Shahzad, and A. Ullah [13], presents the distribution into such sectors: data storage, infrastructure, software, network. Another study on cloud computing security issues, which was conducted by L. Ertaul, S. Singhal and G. Saldamli [14], took a slightly different approach and emphasised information security, network security and general security issues. Furthermore, N. H. Hussein and A. Khalid [15], in their research on the topic of cloud security problems and their solutions, relied on key aspects of cloud infrastructure for their security consideration such as *IaaS*, *PaaS* and *SaaS*. Thus, there are various approaches in the academic community to consider cloud security, which can be roughly categorised into three perspectives:

- cloud service security sectors;
- security of the individual components of the cloud service;
- cloud service architecture.

Data was obtained as a result of studying the security system of Microsoft Azure cloud service. It was possible to identify two parts of the security system of this cloud service during the study. These are security elements that provide access control, security and data management. Azure Active Directory is responsible for access management. In turn, Azure Security Centre and Azure Defender are responsible for security and data management.

Other researchers, such as R. L. Enriquez [16] in a study on managing the state of cloud security in Azure, mentioned other tools for regulating the security system of this cloud service: Azure Activity Monitoring, Azure Activity Log, Azure Information Protection, Azure Key Store and Azure Security Policy. It is also emphasised that this inbuilt security should not be neglected, despite its non-ideal reliability, it provides quite a serious protection against attackers. Another study conducted by V. P. Desai, K. S. Oza, P. P. Shinde, and P. G. Naik [17] describes key aspects of Microsoft Azure cloud service and provides a more detailed description of Azure security behaviour and additional regulatory tools. Thus, hosted web applications are protected thanks to the Azure network security group: restrictive mechanisms for controlling incoming and outgoing traffic do not allow users to unauthorisedly penetrate the environment of web application services. This is also accomplished by the Azure Web Application Firewall and Azure Application Gateway, which are designed to route and filter traffic. Additionally, hidden access controls, service endpoints and private endpoints are used to handle traffic for ubiquitous activity monitoring and inbound traffic management. Thus, there is a more detailed and detailed description of the Microsoft Azure cloud service and its key elements in the scientific community, and specifically in the works devoted more specifically to the Microsoft Azure cloud service and its key elements.

The data obtained during the study about the security issues of Microsoft (Office) 365 cloud service were analysed and combined into three semantic modules presented in the table (Table 3).

Table 3. Microsoft (Office) 365 security issues

Unauthorised access and attacks on credentials	Email and file-sharing security	Data leaks and loss
Unlimited access for employees	Malicious emails	Ease of data acquisition
Hacker attacks	Shared data usage	User errors
Former employees	Internal security issues	Cybersecurity

In the reviewed literature, other problems of the security system of Microsoft (Office) 365 cloud service were also presented. Thus, J. Jurreit, P. Fehrenbach, and F. Kaspar [18] studied the vulnerabilities of the Microsoft (Office) 365 security system. This study pointed out flaws in Microsoft's implementation of *SAML* (*Security Assertion Markup Language*). This markup language contains multiple vulnerabilities that, when implemented in the security system of the Microsoft (Office) 365 cloud service, were not fully covered by other elements of the security system of this cloud service. By copying a user's email to another Office 365 subscription and changing the user's credentials, a vulnerability that can be exploited to log into someone else's account is created. In another study on the topic of systematic wealth management using AI and Microsoft (Office) 365 by P. Sharma and B. Dash [19], the benefits of using Microsoft (Office) 365 cloud service were discussed on the contrary. Thus, it was stated that the management of firms can protect and consolidate organisational data related to their customers or suppliers. Microsoft 365 utilises a dynamic security strategy to create firewalls and a secure system for internal data sharing. By combining external sources such as email, account databases and marketing materials, the cloud service unifies supply chain data. Thus, there are different views in the research community on the security of Microsoft (Office) 365 cloud service, with some researchers pointing out the existing or potential security weaknesses of this cloud service, while others at the same time emphasise the benefits of using this cloud service.

Researchers' opinion on the insecurity of cloud technologies. Traditionally, some researchers support the view that cloud technologies are insecure enough for mass use and their further expansion will lead to a cybersecurity crisis. This position is defended in particular by such figures as S. Mansfield-Devine [20]. Mansfield-Devine [20], in his work on the questionable security of cloud technologies, a joint study by G. Kulkarni, J. Kulkarni, J. Kulkarni, and J. Kulkarni [20]. Kulkarni, J. Gambhir, T. Patil and A. Dongare [21], focus on the vulnerabilities that arise in the process of expansion of cloud technologies.

Opinion of researchers on the advantages of cloud technologies. On the other hand, some researchers have a radically opposite position, reviewing the advantages of cloud technology implementation in the field of education, government, and others. Thus, G. A. Mamedova, L. A. Zeynalova and R. T. Melikova [22], in their joint study on big data technology in e-education with examples of the use of these technologies in the cloud environment. Another work presented by E. M. Onyema, N. C. Eucheria, U. A. Nneka, R. K. Afriyie and O. U. Nwoye [23], examined the positive aspects of cloud technology adoption in learning. In a study conducted by M. Rajesh [24], the benefits of increased adoption of cloud technology in higher education institutions were emphasised.

Conclusions. Thus, this study examined the security systems of cloud services, their key elements and vulnerabilities in general, and the security systems of cloud services such as Microsoft Azure and Microsoft (Office) 365 in particular. Considering the security of cloud services in general, three problematic sectors of cloud security were identified. These sectors are network, data storage and user security. When analysing materials related to specific cloud services in more detail, it was possible to find information about their security systems and the vulnerabilities associated with them. Thus, the main security elements of Microsoft Azure are Azure Active Directory, Azure Security Centre and Azure Defender, and the main security issues of Microsoft (Office) 365 are represented by unauthorised access to confidential information, attacks on user credentials, email and file sharing security issues, information leaks and data loss.

The challenges encountered in evaluating the security systems of Microsoft Azure and Microsoft (Office) 365 cloud services were also analysed. The main difficulty for the study was the lack of availability of information, its outdatedness, inaccuracy, or generalisation. Information about the security systems of cloud services is classified as confidential and such that if made public, the system itself would be jeopardised. Thus, companies that own cloud services have to balance a policy of openness and secrecy to achieve trust and understanding with users who entrust their data to these companies.

This study was aimed at summarising the materials related to security in cloud technologies and security systems of cloud services and attempting to conduct a security assessment of cloud services such as Microsoft Azure and Microsoft (Office) 365. The study is also an attempt to fill the gap in the theoretical material and to encourage the scientific community of Azerbaijan to study the issues related to cloud technologies in more detail.

REFERENCES

1. Grispos G., Glisson W. B., Storer T. (2013) Cloud Security Challenges: Investigating Policies, Standards, and Guidelines in a Fortune 500 Organization. Glasgow: University of Glasgow.
2. Аскерова Т. А. (2022) Основные преимущества применения облачных технологий в системе работы образовательного учреждения. Международный научный журнал «Инновационная наука», № 7-1/2022, С. 10-12.
3. Сеидова И., Каратова Д. (2022) Брандмауэры: исследование методов безопасности и угроз. Sciences of Europe, № 107 (2022), С. 137-139.
4. Институт информационных технологий. Национальная Академия Наук Азербайджана. URL: https://science.gov.az/ru/institutes/3 (дата обращения: 02.08.2023).
5. Набибекова Г. Ч., Дащдамирова К. Г. (2022) Формирование информационного общества в Азербайджане: современное состояние и проблемы. Информационное общество, № 2, С. 93-99.
6. Hökumət buludu. URL: https://gcloud.azcloud.az/ (дата обращения: 02.08.2023).
7. Отчет по результатам исследования осуществимости (оценка потребностей). 2022. Нур-Султан. URL: https://www.astanacivilservicehub.org/uploads/case_studies/20220526_Feasibility_Study_Report_v12_RU.pdf (дата обращения: 02.08.2023).
8. Chinedu P. U., Nwankwo W., Aliu D., Shaba S. M., Momoh M. O. (2020) Cloud Security Concerns: Assessing the Fears of Service Adoption. Archive of Science & Technology, № 1 (2) (2020) P. 164-174.
9. Omer M. A., Yazdeen A. A., Malallah H. S., Abdulrahman L. M. (2022) A Survey on Cloud Security: Concepts, Types, Limitations, and Challenges. Journal of Applied Science and Technology Trends, Vol. 3, № 2, P. 47–57.
10. Durairaj M., Manimaran A. (2015) A Study on Security Issues in Cloud based E-Learning. Indian Journal of Science and Technology, Vol. 8, P. 757–765.
11. Sailakshmi V. (2021) Analysis of Cloud Security Controls in AWS, Azure, and Google Cloud: A Starred Paper Submitted to the Graduate Faculty of St. Cloud State University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science in Information Assurance. St. Cloud: St. Cloud State University.
12. Microsoft Office 365 Security Challenges and Solutions. URL: https://visualedgeit.com/microsoft-office-365-security-challenges-solutions/ (дата обращения: 02.08.2023).
13. Mushtaq M. F., Akram U., Khan I., Khan S. N., Shahzad A., Ullah A. (2017) Cloud Computing Environment and Security Challenges: A Review. International Journal of Advanced Computer Science and Applications, Vol. 8, № 10, P. 183-195.
14. Ertaul L., Singhal S., Saldamli G. (2010) Security Challenges in Cloud Computing.
15. Hussein N. H., Khalid A. (2016) A survey of Cloud Computing Security challenges and solutions. International Journal of Computer Science and Information Security, Vol. 14, № 1, P. 52-56.
16. Enriquez R. L. (2021) Cloud Security Posture Management (CSPM) in Azure. Helsinki: Metropolia University of Applied Sciences.
17. Desai V. P., Oza K. S., Shinde P. P., Naik P. G. (2021) Microsoft Azure: Cloud Platform for Application Service Deployment. International Journal of Scientific Research in Multidisciplinary Studies, Vol. 7, № 10, P. 20-23.
18. Jurreit J., Fehrenbach P., Kaspar F. (2017) Analysis of security vulnerabilities in Microsoft Office 365 in regard to SAML. Furtwangen im Schwarzwald: Hochschule Furtwangen University.
19. Sharma P., Dash B. (2023) Smart SCM Using AI and Microsoft 365. International Journal of Advanced Research in Computer and Communication Engineering, Vol. 12, № 1, P. 44-54.
20. Mansfield-Devine S. (2008) Danger in the clouds. Network Security, Vol. 2008, № 12, P. 9-11.
21. Kulkarni G., Gambhir J., Patil T., Dongare A. (2012) A security aspects in cloud computing. 2012 IEEE International Conference on Computer Science and Automation Engineering.

22. Мамедова Г. А., Зейналова Л. А., Меликова Р. Т. (2017) Технологии больших данных в электронном образовании. Открытое образование, Т. 21, № 6, С. 41-48.
23. Onyema E. M., Eucheria N. C., Nneka U. A., Afriyie R. K., Nwoye O. U. (2020) Cloud security challenges: implication on education. International Journal of Computer Science and Mobile Computing, Vol. 9, № 2, P. 56-73.
24. Rajesh M. (2017) A systematic review of cloud security challenges in higher education. The Online Journal of Distance Education and e-Learning, Vol. 5, № 4, P. 1-10.

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

1. "The Baku Engineering University Mathematics and Computer Science" accepts original unpublished articles and reviews in the research field of the author.
2. Articles are accepted in English.
3. File format should be compatible with **Microsoft Word** and must be sent to the electronic mail (**journal@beu.edu.az**) of the Journal. The submitted article should follow the following format:

- Article title, author's name and surname
- The name of workplace
- Mail address
- Abstract and key words

4. The title of the article should be in each of the three languages of the abstract and should be centred on the page and in bold capitals before each summary.
5. **The abstract** should be written in **9 point** type size, between **100** and **150** words. The abstract should be written in the language of the text and in two more languages given above. The abstracts of the article written in each of the three languages should correspond to one another. The keywords should be written in two more languages besides the language of the article and should be at least three words.
6. .**UDC** and **PACS** index should be used in the article.
7. The article must consist of the followings:

- Introduction
- Research method and research
- Discussion of research method and its results
- In case the reference is in Russian it must be given in the Latin alphabet with the original language shown in brackets.

8. **Figures, pictures, graphics and tables** must be of publishing quality and inside the text. Figures, pictures and graphics should be captioned underneath, tables should be captioned above.
9. **References** should be given in square brackets in the text and listed according to the order inside the text at the end of the article. In order to cite the same reference twice or more, the appropriate pages should be given while keeping the numerical order. For example: [7, p.15].

Information about each of the given references should be full, clear and accurate. The bibliographic description of the reference should be cited according to its type (monograph, textbook, scientific research paper and etc.) While citing to scientific research articles, materials of symposiums, conferences and other popular scientific events, the name of the article, lecture or paper should be given.

Samples:

a) ***Article:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure af monomerrik and dimeric conapeetes of carnosine üith zinc,* Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Book:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002

c) ***Conference paper:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information – Commu-nication Technologies in Science and education. II International Conference."*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*
References should be in 9-point type size.

10. The margins sizes of the page: - Top 2.8 cm. bottom 2.8 cm. left 2.5 cm, right 2.5 cm. The article main text should be written in Palatino Linotype 11 point type size single-spaced. Paragraph spacing should be 6 point.
11. The maximum number of pages for an article should not exceed 15 pages
12. The decision to publish a given article is made through the following procedures:

- The article is sent to at least to experts.
- The article is sent back to the author to make amendments upon the recommendations of referees.
- After author makes amendments upon the recommendations of referees the article can be sent for the publication by the Editorial Board of the journal.

YAZI VƏ NƏŞR QAYDALARI

1. "Journal of Baku Engineering University- Riyaziyyat və kompüter elmləri" - əvvəllər nəşr olunmamış orijinal əsərləri və müəllifin tədqiqat sahəsi üzrə yazılmış icmal məqalələri qəbul edir.
2. Məqalələr İngilis dilində qəbul edilir.
3. Yazılar **Microsoft Word** yazı proqramında, (**journal@beu.edu.az**) ünvanına göndərilməlidir. Göndərilən məqalələrdə aşağıdakılara nəzərə alınmalıdır:

- Məqalənin başlığı, müəllifin adı, soyadı,
- İş yeri,
- Elektron ünvanı,
- Xülasə və açar sözlər.

4. **Məqalədə başlıq hər xülasədən əvvəl** ortada, qara və böyük hərflə xülasələrin yazıldığı hər üç dildə olmalıdır.
5. **Xülasə** 100-150 söz aralığında olmaqla, 9 punto yazı tipi böyüklüyündə, məqalənin yazıldığı dildə və bundan əlavə yuxarıda göstərilən iki dildə olmalıdır. Məqalənin hər üç dildə yazılmış xülasəsi bir-birinin eyni olmalıdır. Açar sözlər uyğun xülasələrin sonunda onun yazıldığı dildə verilməklə ən azı üç sözdən ibarət olmalıdır.
6. Məqalədə UOT və PACS kodları göstərilməlidir.
7. Məqalə aşağıdakılardan ibarət olmalıdır:

- Giriş,
- Tədqiqat metodu
- Tədqiqat işinin müzakirəsi və onun nəticələri,
- İstinad ədəbiyyatı rus dilində olduğu halda orjinal dili mötərzə içərisində göstərməklə yalnız Latın əlifbası ilə verilməlidir.

8. **Şəkil**, **rəsm**, **grafik** və **cədvəllər** çapda düzgün, aydın çıxacaq vəziyyətdə və mətn içərisində olmalıdır. Şəkil, rəsm və qrafiklərin yazıları onların altında yazılmalıdır. Cədvəllərdə başlıq cədvəlin üstündə yazılmalıdır.
9. **Mənbələr** mətn içərisində kvadrat mötərizə daxilində göstərilməklə məqalənin sonunda mətn daxilindəki sıra ilə düzülməlidir. Eyni mənbəyə iki və daha cox istinad edildikdə əvvəlki sıra sayı saxlanmaqla müvafiq səhifələr göstərilməlidir. Məsələn: [7,səh.15].

Ədəbiyyat siyahısında verilən hər bir istinad haqqında məlumat tam və dəqiq olmalıdır. İstinad olunan mənbənin biblioqrafik təsviri onun növündən (monoqrafiya, dərslik, elmi məqalə və s.) asılı olaraq verilməlidir. Elmi məqalələrə, simpozium, konfrans, və digər nüfuzlu elmi tədbirlərin materiallarına və ya tezislərinə istinad edərkən məqalənin, məruzənin və ya tezisin adı göstərilməlidir.

Nümunələr:

a) ***Məqalə:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure af monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc,* Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Kitab:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, 2002

c) ***Konfrans:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*

Mənbələr 9 punto yazı tipi böyüklüyündə olmalıdır.

10. **Səhifə ölçüləri:** üstdən 2.8 sm, altdan 2.8 sm, soldan 2.5 sm və sağdan 2.5 sm olmalıdır. Mətn 11 punto yazı tipi böyüklüyündə, **Palatino Linotype** yazı tipi ilə və tək simvol aralığında yazılmalıdır. Paraqraflar arasında 6 punto yazı tipi aralığında məsafə olmalıdır.
11. Orijinal tədqiqat əsərlərinin tam mətni bir qayda olaraq 15 səhifədən artıq olmamalıdır.
12. Məqalənin nəşrə təqdimi aşağıdakı qaydada aparılır:

- Hər məqallə ən azı iki ekspertə göndərilir.
- Ekspertlərin tövsiyələrini nəzərə almaq üçün məqalə müəllifə göndərilir.
- Məqalə, ekspertlərin tənqidi qeydləri müəllif tərəfindən nəzərə alındıqdan sonra Jurnalın Redaksiya Heyəti tərəfindən çapa təqdim oluna bilər.

YAZIM KURALLARI

1. "Journal of Baku Engineering University- Matematik ve Bilgisayar Bilimleri" önceler yayımlanmamış orijinal çalışmaları ve yazarın kendi araştırma alanın-da yazılmış derleme makaleleri kabul etmektedir.
2. Makaleler İngilizce kabul edilir.
3. Makaleler Microsoft Word yazı programında, (**journal@beu.edu.az**) adresine gönderilmelidir. Gönderilen makalelerde şunlar dikkate alınmalıdır:

- Makalenin başlığı, yazarın adı, soyadı,
- İş yeri,
- E-posta adresi,
- Özet ve anahtar kelimeler.

4. **Özet** 100-150 kelime arasında olup 9 font büyüklüğünde, makalenin yazıldığı dilde ve yukarıda belirtilen iki dilde olmalıdır. Makalenin her üç dilde yazılmış özeti birbirinin aynı olmalıdır. Anahtar kelimeler uygun özetin sonunda onun yazıldığı dilde verilmekle en az üç sözcükten oluşmalıdır.
5. Makalede UOT ve PACS tipli kodlar gösterilmelidir.
6. Makale şunlardan oluşmalıdır:

- Giriş,
- Araştırma yöntemi
- Araştırma
- Tartışma ve sonuçlar,
- İstinat Edebiyatı Rusça olduğu halde orjinal dili parantez içerisinde göstermekle yalnız Latin alfabesi ile verilmelidir.

7. **Şekil, Resim, Grafik** ve **Tablolar** baskıda düzgün çıkacak nitelikte ve metin içerisinde olmalıdır. Şekil, Resim ve grafiklerin yazıları onların alt kısımda yer almalıdır. Tablolarda ise başlık, tablonun üst kısmında bulunmalıdır.
8. **Kullanılan kaynaklar**, metin dâhilinde köşeli parantez içerisinde numaralandırılmalı, aynı sırayla metin sonunda gösterilmelidir. Aynı kaynaklara tekrar başvurulduğunda sıra muhafaza edilmelidir. Örneğin: [7,seh.15].

Referans verilen her bir kaynağın künyesi tam ve kesin olmalıdır. Referans gösterilen kaynağın türü de eserin türüne (monografi, derslik, ilmî makale vs.) uygun olarak verilmelidir. İlmi makalelere, sempozyum, ve konferanslara müracaat ederken makalenin, bildirinin veya bildiri özetlerinin adı da gösterilmelidir.

Örnekler:

a) ***Makale:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and Electronic Structure of Monomerik and Dimeric Conapeetes of Carnosine Üith Zinc*, Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Kitap:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002

c) ***Kongre:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*

Kaynakların büyüklüğü 9 punto olmalıdır.

9. **Sayfa ölçüleri**; üst: 2.8 cm, alt: 2.8 cm, sol: 2.5 cm, sağ: 2.5 cm şeklinde olmalıdır. Metin 11 punto büyüklükte **Palatino Linotype** fontu ile ve tek aralıkta yazılmalıdır. Paragraflar arasında 6 puntoluk yazı mesafesinde olmalıdır.
10. Orijinal araştırma eserlerinin tam metni 15 sayfadan fazla olmamalıdır.
11. Makaleler dergi editör kurulunun kararı ile yayımlanır. Editörler makaleyi düzeltme için yazara geri gönderilebilir.
12. Makalenin yayına sunuşu aşağıdaki şekilde yapılır:

- Her makale en az iki uzmana gönderilir.
- Uzmanların tavsiyelerini dikkate almak için makale yazara gönderilir.
- Makale, uzmanların eleştirel notları yazar tarafından dikkate alındıktan sonra Derginin Yayın Kurulu tarafından yayına sunulabilir.

13. Azerbaycan dışından gönderilen ve yayımlanacak olan makaleler için,(derginin kendilerine gonderilmesi zamani posta karşılığı) 30 ABD Doları veya karşılığı TL, T.C. Ziraat Bankası/Üsküdar-İstanbul 0403 0050 5917 No'lu hesaba yatırılmalı ve makbuzu üniversitemize fakslanmalıdır.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. «Journal of Baku Engineering University» - Математики и информатики публикует оригинальные, научные статьи из области исследования автора и ранее не опубликованные.
2. Статьи принимаются на английском языке.
3. Рукописи должны быть набраны согласно программы **Microsoft Word** и отправлены на электронный адрес (**journal@beu.edu.az**). Отправляемые статьи должны учитывать следующие правила:

- Название статьи, имя и фамилия авторов
- Место работы
- Электронный адрес
- Аннотация и ключевые слова

4. **Заглавие статьи** пишется для каждой аннотации заглавными буквами, жирными буквами и располагается по центру. Заглавие и аннотации должны быть представлены на трех языках.
5. **Аннотация**, написанная на языке представленной статьи, должна содержать 100-150 слов, набранных шрифтом 9 punto. Кроме того, представляются аннотации на двух других выше указанных языках, перевод которых соответствует содержанию оригинала. Ключевые слова должны быть представлены после каждой аннотации на его языке и содержать не менее 3-х слов.
6. В статье должны быть указаны коды UOT и PACS.
7. Представленные статьи должны содержать:

- Введение
- Метод исследования
- Обсуждение результатов исследования и выводов.
- Если ссылаются на работу на русском языке, тогда оригинальный язык указывается в скобках, а ссылка дается только на латинском алфавите.

8. **Рисунки, картинки, графики и таблицы** должны быть четко выполнены и размещены внутри статьи. Подписи к рисункам размещаются под рисунком, картинкой или графиком. Название таблицы пишется над таблицей.
9. **Ссылки** на источники даются в тексте цифрой в квадратных скобках и располагаются в конце статьи в порядке цитирования в тексте. Если на один и тот же источник ссылаются два и более раз, необходимо указать соответствующую страницу, сохраняя порядковый номер цитирования. Например: [7, стр.15]. Библиографическое описание ссылаемой литературы должно быть проведено с учетом типа источника (монография, учебник, научная статья и др.). При ссылке на научную статью, материалы симпозиума, конференции или других значимых научных мероприятий должны быть указаны название статьи, доклада или тезиса.

   Например:

a) ***Статья:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva I.N., Godjayev N.M. *Spatial and electronic structure of monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc,* Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Книга:*** Christie on Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles.* Fourth Edition, Prentice Hall, 2002

c) ***Конференция:*** Sadychov F.S, Fydin C,Ahmedov A.I. Appligation of Information-Communication Nechnologies in Science and education. II International Conference. *"Higher Twist Effects In Photon-Proton Collision",* Bakı,01-03 Noyabr, 2007, ss.384-391

Список цитированной литературы набирается шрифтом 9 punto.

10. **Размеры страницы:** сверху 2.8 см, снизу 2.8 см, слева 2.5 и справа 2.5. Текст печатается шрифтом **Palatino Linotype**, размер шрифта 11 punto, интервал-одинарный. Параграфы должны быть разделены расстоянием, соответствующим интервалу 6 punto.
11. Полный объем оригинальной статьи, как правило, не должен превышать 15 страниц.
12. Представление статьи к печати производится в ниже указанном порядке:

- Каждая статья посылается не менее двум экспертам.
- Статья посылается автору для учета замечаний экспертов.
- Статья, после того, как автор учел замечания экспертов, редакционной коллегией журнала может быть рекомендована к печати.