ISSN 2521-635X

Volume 6
Number 2

2022

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Journal is published twice a year
Number-1. June, Number-2. December

An International Journal

http://journal.beu.edu.az

FOUNDER

Havar Mammadov

EDITOR-IN-CHIEF

Hamzaga Orucov

CO-EDITORS

Agasi Melikov

EDITORIAL ADVISORY BOARD

Abzeddin Adamov *(Azerbaijan, ADA)*
Agil Khanmamedov *(Azerbaijan, Baku State University)*
Alekber Aliyev *(Azerbaijan, Baku State University)*
Araz Aliyev *(Azerbaijan, Azerbaijan State Oil and Industry University is a tertiary education institution in Baku,)*
Gorbachuk Valentina Ivanovna *(Ukraina, Academy of Science)*
Hamdulla Aslanov *(Azerbaijan, Akademy of Science)*
Ibrahim Nebiyev *(Azerbaijan, Baku State University)*
Rakib Efendiyev *(Azerbaijan, Baku State University)*
Sosnin Petr Ivanovich *(Russia,Ulyanovsk State Technical University)*

INTERNATIONAL ADVISORY BOARD

Abdeljalil Nachaoui *(France, Nantes University)*
Barış Erbaş *(Anadolu University, Turkey)*
Che Soong Kim *(Koreya, Sangji University)*
Chakib Abdelkrim *(Morocco, Beni Mellal University)*
Elshad Eyvazov *(Azerbaijan, Baku State University)*
Ekber Eliyev *(Azerbaijan, National Academy of Science)*
Garib Murshudov *(York Academy,UK, London)*
Golovko Vladimir Adamovich *(Belarus, Brest State Universiteti)*
Hamed Sari-Sarraf *(USA,TexasTechnik University)*
Hari Srivastava *(Canada,Victoria,)*
Hidayyat Guseynov *(Azerbaijan, Baku State University)*
Jauberteau Francois *(France,Nantes University)*
Kamil Mansimov *(Azerbaijan, Baku State University)*
Ludmila Prikazchikova *(Keele University, England)*
Mourad Nachaoui *(France,Nantes University)*
Rasim Alikuliyev *(Azerbaijan, National Academy of Science)*
Tarasenko Vladimir Petrovich *(National Technical University of Ukraine)*
Telman Aliyev *(Azerbaijan, National Academy of Science)*
Telman Malikov *(Azerbaijan, National Academy of Science)*
Vedat Coşkun *(Turkiye,Işık University)*
Vladimir B. Vasilyev *(Russia, Lipetsk State Technical University)*
Sabir Mirzayev *(Azerbaijan, Baku State University)*
Dimkov Mikhail Pakhomovich *(Belarus State Economic University)*
Arquchintsev Alexander Valeryevich, *(Irkutsk State University)*

EXECUTIVE EDITORS

Shafag Alizade

ASSISTANT EDITORS

Svetlana Denmuhammedovna

DESIGN

Ilham Aliyev

CONTACT ADDRESS

Journal of Baku Engineering University
AZ0102, Khirdalan city, Hasan Aliyev str. 120, Absheron, Baku, Azerbaijan
Tel: 00 994 12 - 349 99 95 Fax: 00 994 12 349-99-90/91

e-mail: *journal@beu.edu.az*
web: *http://journal.qu.edu.az*
facebook: *Journal Of Baku Engineering University*

Copyright © Baku Engineering University

ISSN 2521-635X

ISSN 2521-635X

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Baku - AZERBAIJAN

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

2022. Volume 6, Number 2

CONTENTS

BİR ÇOXNÖQTƏLİ KEYFİYYƏT MEYARLİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ PONTRYAGİNİN MAKSİMUM PRİNSİPİ TİPLİ ZƏRURİ ŞƏRT

Vəfa Rzayeva 69

THE MIXED PROBLEM FOR ONE-CLASS NONLINEAR DISSIPATIVE TIMOSHENKO SYSTEM

Ferhadova Yeter 75

VIBRATIONS OF REINFORCED INHOMOGENEOUS, WEAKENED CYLINDRICAL PANELS IN CONTACT WITH A VISCOELASTIC MEDIUM

Latifov F.S., Movsumova A.H. 84

HİLBERT FƏZASINDA İKİNCİ TƏRTİB OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN SONLU PARCADA BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİNİN TƏDQİQİ

R.F. Hətəmova 92

İKİ ÖLÇÜLÜ VOLTERRA TİP İNTEQRAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİ İLƏ TƏSVİR OLUNAN OPTIMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN BİRİNCİ VƏ İKİNCİ TƏRTİB ZƏRURİ ŞƏRTLƏR VƏ KLASSİK MƏNADA MƏXSUSİ İDARƏLƏRİN OPTİMALLIĞI HAQQINDA

Vəfa Rzayeva 97

2022. Volume 6, Number 2 *Pages 69-74*

UOT 519.3

BİR ÇOXNÖQTƏLİ KEYFİYYƏT MEYARLİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ PONTRYAGİNİN MAKSİMUM PRİNSİPİ TİPLİ ZƏRURİ ŞƏRT

VƏFA RZAYEVA

Sumqayıt Dövlət Universiteti,

Sumqaylt, Azərbaycan

vefa.asgerova77@mail.ru

XÜLASƏ

Məqalədə iki ölçülü Volterra tip inteqral tənliklər sistemi və çoxnöqtəli funksional ilə təsvir olunan bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Funksionalın artım düsturu qurulur. Mümükün idarənin xüsusi artımı vasitəsilə qurulmuş artım düsturu tədqiq edilir və optimallıq üçün Pontryaginin maksimum prinsipinin analoqu şəklində zəruri şərt alınır.

Açar sözlər: interqal tənlik, çoxnöqtəli funksional, mümkün idarə, optimallıq üçün zəruri şərt, Pontryaginin maksimum prinsipi.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ТИПА ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С МНОГОТОЧЕЧНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается одна задача оптимального управления, описываемая двумерным интегральным уравнением типа Вольтерра и многоточечным функционалом. Строится формула приращения функционала. С помощью специального приращения допустимого управления исследуется построенная формула приращения и в форме аналога принципа максимума Понтрягина доказывается необходимое условие оптимальности.

Ключевые слова: интегральное уравнение, многоточечный функционал, допустимое управление, необходимое условие оптимальности, принцип максимума Понтрягина.

A NECESSARY OPTIMALITY CONDITION OF THE PONTRYAGIN'S MAXIMUM PRINCIPLE TYPE IN AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH A MULTIPOINT PERFORMANCE CRITERION

ABSTRACT

The paper considers one optimal control problem described by a two-dimensional Volterra type integral equation with a multipoint functional. A formula for the increment of the functional is developed. With the help of a special increment of the admissible control, the constructed formula increations is studied and, in the form of an analogue of the Pontryagin's maximum principle, the necessary optimality condition is proved.

Keywords: integral equation, multipoint functional, admissible control, necessary optimality condition, Pontryagin's maximum principle.

Giriş. Bir çox proseslər müxtəlif tip inteqro-diferensial və inteqral tənliklərlə təsvir olunurlar (bax məsələn, [1-5]).

İnteqral tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqi diferensial tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqinə nisbətən daha mürəkkəb məsələdir.

Əvvəllər [3, 5] və sair işlərdə Volterra tip inteqral tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərinin keyfiyyət nəzəriyyəsi müəyyən qədər tədqiq edilmişdir.

Bu işdə iki ölçülü Volterra tip inteqral tənliklər sistemi və çoxnöqtəli Bolsa tipli ketfiyyət meyarı ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsinə baxılır.

Baxılan məsələdə təbii hamarlıq şərtləri daxilində optimallıq üçün Pontryaginin maksimum prinsipinin (bax məsələn, [6]) analoqu şəklində zəruri şərt isbat edilmişdir.

1.Məsələnin qoyuluşu. Tutaq ki, $U \subset R^r$ verilmiş, boş olmayan və məhdud çoxluqdur, $u(t,x) - r$-ölçülü hissə-hissə kəsilməz (sonlu sayda birinci növ kəsilmə xəttinə malik) idarəedici vektor-funksiya (bax məsələn, [7]), $f(t,x,\tau,s,z,u) -$ verilmiş, arqumentlərinin küllüsünə nəzərən z-ə görə xüsusi törəməsi ilə birlikdə kəsilməz n-ölçülü vektor-funksiya, $F(t,x,z,u) -$ verilmiş, arqumentlərinin küllüsünə nəzərən z-ə görə xüsusi törəməsi ilə birlikdə kəsilməz skalyar funksiya, $D = [t_0,t_1] \times [x_0,x_1]$ verilmiş düzbucaqlı, $(T_i, X_i), i = \overline{1,k}\ (t_0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_k \leq t_1\,; x_0 < X_1 < X_2 < \ldots < X_k \leq x_1) -$ verilmiş nöqtələr, $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_k) -$ isə verilmiş kəsilməz-diferensiallanan skalyar funksiyadır.

$$J(u) = \varphi\big(z(T_1,X_1), z(T_2,X_2), \ldots, z(T_k,X_k)\big) + \\ + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} F\big(t,x,z(t,x),u(t,x)\big)dxdt \tag{1}$$

Bolsa tipli funksionalın

$$z(t,x) = \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} f\big(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)dsd\tau\,, \tag{2}$$

$$u(t,x) \in U \subset R^r, (t,x) \in D \tag{3}$$

məhdudiyyətləri daxilində minimumunun tapılması məsələsinə baxaq.

Məqsədimiz optimallıq üçün zəruri şərt tapmaqdır.

2. Funksionalın artım düsturu. Tutaq ki, $(u(t,x), z(t,x))$ və $(\bar{u}(t,x) = u(t,x) + \Delta u(t,x), \bar{z}(t,x) = z(t,x) + \Delta z(t,x)\big)$ iki mümkün prosesdirlər. Onda funskionalın bu proseslərə cavab verən artımını

$$\Delta J(u) = \varphi\big(\bar{z}(T_1,X_1), \bar{z}(T_2,X_2), \ldots, \bar{z}(T_k,X_k)\big) - \varphi\big(z(T_1,X_1), z(T_2,X_2), \ldots, z(T_k,X_k)\big) + \\ + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\big[F\big(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x)\big) - F\big(t,x,z(t,x),u(t,x)\big)\big]dxdt \tag{4}$$

şəklində yaza bilərik.

Aydındır ki, $\Delta z(t,x)$

$$\Delta z(t,x) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\big[f\big(t,x,\tau,s,\bar{z}(\tau,s),\bar{u}(\tau,s)\big) - f\big(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)\big]dsd\tau \tag{5}$$

tənliyinin həlli olar.

Bu eyniyiliyin hər iki tərəfini soldan skalyar olaraq hələlik naməlum olan $\psi(t,x)$ vektor-funksiyasına vuraq. Fubini teoremindən istifadə edərək alarıq ki,

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\Delta z(t,x)dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1}\psi'(\tau,s)\left[f\left(\tau,s,t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x)\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-f\left(\tau,s,t,x,z(t,x),u(t,x)\right)\right]dsd\tau\right]dxdt. \quad (6)$$

Bu (6) eyniliyinindən istifadə etməklə (4) artım düsturundan alarıq ki,

$$\Delta J(u)=\varphi\left(\overline{z}(T_1,X_1),\overline{z}(T_2,X_2),\dots,\overline{z}(T_k,X_k)\right)-$$
$$-\varphi\left(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\right)+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[F\left(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x)\right)-F\left(t,x,z(t,x),u(t,x)\right)\right]dxdt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\Delta z(t,x)dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1}\psi'(\tau,s)\left[f\left(\tau,s,t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x)\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-f\left(\tau,s,t,x,z(t,x),u(t,x)\right)\right]dsd\tau\right]dxdt \quad (7)$$

Teylor düsturunu tətbiq etməklə alırıq ki,

$$\varphi\left(\overline{z}(T_1,X_1),\overline{z}(T_2,X_2),\dots,\overline{z}(T_k,X_k)\right)-\varphi\left(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t,x)\frac{\partial\varphi'\left(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\right)}{\partial a_i}\Delta z(T_i,X_i)+o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|\right). \quad (8)$$

Burada $\alpha_i(t,x)$ $[t_0,T_i]\times[x_0,X_i]$ düzbucaqlısının xarakteristik funksiyasıdır.

Yuxarıda verilmiş (5) düsturundan alırıq ki,

$$\Delta z(T_i,X_i)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\alpha_i(t,x)\left[f\left(T_i,X_i,t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x)\right)-\right.$$
$$\left.-f\left(T_i,X_i,t,x,z(t,x),u(t,x)\right)\right]dxdt. \quad (9)$$

Bu (8) və (9) bərabərliklərini nəzərə almaqla funksionalın (2.2.7) artım düsturunu aşağıdakı şəkildə yaza bilərik

$$\Delta J(u)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t,x)\frac{\partial\varphi'\left(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\right)}{\partial a_i}\times$$
$$\times\left[f\left(T_i,X_i,t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x)\right)-f\left(T_i,X_i,t,x,z(t,x),u(t,x)\right)\right]dxdt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\Delta z(t,x)dxdt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1}\psi'(\tau,s)\left[f\left(\tau,s,t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x)\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-f\left(\tau,s,t,x,z(t,x),u(t,x)\right)\right]dsd\tau\right]dxdt+o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|\right)+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[F\left(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x)\right)-F\left(t,x,z(t,x),u(t,x)\right)\right]dxdt. \quad (10)$$

$$H\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t,x)\frac{\partial\varphi'\big(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\big)}{\partial a_i}\times$$

$$\times f\big(T_i,X_i,t,x,z(t,x),u(t,x)\big)-F\big(t,x,z(t,x),u(t,x)\big)+$$

$$+\int_t^{t_1}\int_x^{x_1}\psi'(\tau,s)f\big(\tau,s,t,x,z(t,x),u(t,x)\big)dsd\tau$$

şəklində Hamilton-Pontryagin funskiyasının analoqunu daxil edək.

Bu işarələməni nəzərə alsaq (10) artım düsturunu

$$\Delta J(u)=-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\big[H\big(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x),\psi(t,x)\big)-$$

$$-H\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)\big]dxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\Delta z(t,x)dxdt+o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|\right) \tag{11}$$

şəkildə yaza bilərik.

Teylor düsturuna əsasən yaza bilərik ki,

$$H(t,x,\bar{z},\bar{u},\psi)-H(t,x,z,u,\psi)=H(t,x,z,\bar{u},\psi)-H(t,x,z,u,\psi)+$$

$$+\big(H_z(t,x,z,\bar{u},\psi)-H_z(t,x,z,u,\psi)\big)'\Delta z+H_z'(t,x,z,u,\psi)\Delta z+o_2(\|\Delta z\|).$$

Bu ayrıyrılışı (11) düsturunda nəzərə alsaq və fərz etsək ki, $\psi(t,x)$ vektor-funksiyası

$$\psi(t,x)=H_z\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)$$

tənliyinin həllidir, görərik ki,

$$\Delta J(u)=-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\big[H\big(t,x,z(t,x),\bar{u}(t,x),\psi(t,x)\big)-$$

$$-H\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)\big]dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\big[H_z\big(t,x,z(t,x),\bar{u}(t,x),\psi(t,x)\big)-$$

$$-H_z\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)\big]'\Delta z(t,x)dxdt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_2(\|\Delta z(t,x)\|)dxdt+o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|\right). \tag{12}$$

Daha sonra Qronuoll-Vendroff lemmasından istifadə edərək (bax məsələn, [8]) [5] işinə analoji olaraq

$$\|\Delta z(t,x)\|\le L_1\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\big\|f\big(t,x,\tau,s,\bar{z}(\tau,s),\bar{u}(\tau,s)\big)-$$

$$-f\big(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)\big\|dsd\tau \tag{13}$$

qiymətlənməsi alınır.

Burada $L_1 = const > 0$ müəyyən bir sabitdir.

3. Pontyaginin maksimum prinsipinin analoqu. Tutaq ki, $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1) \times [x_0, x_1)$ $u(t,x)$ mümkün idarəsinin ixtiyari kəsilməzlik nöqtəsi, $v \in U -$ ixtiyari vektor, $\varepsilon > 0$ isə elə kafi qədər kiçik ixtiyari ədəddir ki, $\theta + \varepsilon < t_1$, $\xi + \varepsilon < x_1$ bərabərsizlikləri ödənilir. Onda $u(t,x)$ mümkün idarəsinin xüsusi artımını

$$\Delta u_\varepsilon(t,x) = \begin{cases} v - u(t,x), & (t,x) \in [\theta, \theta+\varepsilon) \times [\xi, \xi+\varepsilon), \\ 0, & (t,x) \in D \backslash [\theta, \theta+\varepsilon) \times [\xi, \xi+\varepsilon), \end{cases} \tag{14}$$

düsturu ilə təyin edə bilərik.

Daha sonra $\Delta z_\varepsilon(t,x)$ ilə $z(t,x)$ vəziyyətinin $u(t,x)$ mümkün idarəsinin (14) düsturu ilə təyin olunmuş xüsusi artımına cavab verən xüsusi artımını işarə edək.

Yuxarıda verilmiş (13) qiymətləndirməsindən alırıq ki,

$$\|\Delta z_\varepsilon(t,x)\| \le L_2 \varepsilon^2, (t,x) \in D. \tag{15}$$

Burada $L_2 = const > 0$ müəyyən bir sabitdir.

Bu qiymətləndirməni və (14) düsturunu (12) artım düsturunda nəzərə alaraq orta qiymət teoremindən istifadə edərək alarıq ki,

$$J(u + \Delta u_\varepsilon) - J(u) = -\varepsilon^2 \big[H\big(\theta, \xi, z(\theta,\xi), v, \psi(\theta,\xi)\big) -$$
$$-H\big(\theta, \xi, z(\theta,\xi), u(\theta,\xi), \psi(\theta,\xi)\big)\big] + o(\varepsilon^2).$$

Bu ayrılışdan alırıq ki, əgər $u(t,x)$ optimal idarədirsə, onda

$$-\varepsilon^2 \big[H\big(\theta, \xi, z(\theta,\xi), v, \psi(\theta,\xi)\big) - H\big(\theta, \xi, z(\theta,\xi), u(\theta,\xi), \psi(\theta,\xi)\big)\big] \ge 0$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Bu bərabərsizlikdən ε-nun kafi qədər kiçik və ixtiyari müsbət ədəd olmasına görə

$$H\big(\theta, \xi, z(\theta,\xi), v, \psi(\theta,\xi)\big) - H\big(\theta, \xi, z(\theta,\xi), u(\theta,\xi), \psi(\theta,\xi)\big) \le 0$$

bərabərsizliyi alınır.

Teorem 1. Baxılan (1)-(3) optimal idarəetmə məsələsində $u(t,x)$ mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\max_{v \in U} H\big(\theta, \xi, z(\theta,\xi), v, \psi(\theta,\xi)\big) = H\big(\theta, \xi, z(\theta,\xi), u(\theta,\xi), \psi(\theta,\xi)\big) \tag{16}$$

münasibətinin ixtiyari $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1) \times [x_0, x_1)$ üçün ödənməsidir.

Beləliklə, baxılan məsələdə Pontryaginin maksimum prinsipinin (bax məsələn, [6]) analoqunu isbat etmiş olduq.

ƏDƏBİYYAT

1. Волтерра В. *Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений*, М. Наука, 1982, 304 с.
2. Цалюк З.Б. *Интегральные уравнения Вольтерра*, Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. 1997, т. 15, с. 191-198.
3. Ведякова А.О., Миланович Е.В., Слита О.В., Тергычтный-Даури О.В. *Методы оптимального управления*, Спб. Университет ИТМО. 2011, 219 с.
4. Волтерра В. *Математическая теория борьбы за существования*, М. Наука, 1976, 286 с.
5. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. *Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра*, Баку, ЭЛМ, 2013, 224 с.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В. *Методы оптимизации*. Минск. Изд-во «Четыре четверти», 2011, 472 с.
7. Ащепков Л.Т., Васильев О.В. *Об оптимальности особых управлений в системах Гурса-Дарбу*, Журнал вычисл. мат. и мат. физики. 1975, №5, с. 1157-1167.
8. Новоженов М.М., Сумин В.И., Сумин М.И. *Методы оптимального управления системами математической физики*. Горький, Изд-во ГГУ, 1986, 87 с.

2022. Volume 6, Number 2 *Pages 75-83*

УДК 517.957

THE MIXED PROBLEM FOR ONE-CLASS NONLINEAR DISSIPATIVE TIMOSHENKO SYSTEM

FERHADOVA YETER

Institute of Mathematics and Mechanics,

Ministry of Science and Education Republic of Azerbaijan

ferhadova.yeter@gmail.com

ABSTRACT

In this article, we consider the Timoshenko system with nonlinear dissipation and nonlinear source function which describes the transverse vibrations of a beam. Our main concern in this paper is to study the well-posedness of the mixed problem for one-class nonlinear dissipative Timoshenko system. The system coupled hyperbolic equations is supplemented by some initial and boundary conditions. Under suitable hypotheses, we show the existence of a global solution of the considered problem by modelling this problem as the Cauchy problem for an operator coefficient equation in a certain space.

Keywords: Timoshenko system, mixed problem, beam, nonlinear source function, global solution

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНО ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ ТИМОШЕНКО

РЕЗЮМЕ

В данной статье мы рассматриваем систему Тимошенко с нелинейной диссипацией и нелинейной функцией источника, которая описывает поперечные колебания балки. Нашей главной целью в этой статье является исследование корректности смешанной задачи для одного класса нелинейной диссипативной системы Тимошенко. Система связанных гиперболических уравнений дополняется некоторыми начальными и граничными условиями. При подходящих гипотезах мы показываем существование глобального решения рассматриваемой задачи, моделируя эту задачу как задачу Коши для операторно-коэффициентного уравнения в некотором пространстве.

Ключевые слова: Система Тимошенко, смешанная задача, балка, нелинейная функция источника, глобальное решение

BİR SİNİF QEYRİ-XƏTTİ DİSSİPATİV TİMOŞENKO SİSTEMİ ÜÇÜN QARIŞIQ MƏSƏLƏ

XÜLASƏ

Bu məqalədə, çubuğun eninə titrəmələrini təsvir edən qeyri-xətti dissipasiya və qeyri-xətti mənbə funksiyası olan Timoşenko sistemini nəzərdən keçiririk. Bu məqalədəki əsas məqsədimiz bir sinif qeyri-xətti dissipativ Timoşenko sistemi üçün qarışıq məsələnin yaxşı qoyuluşunu öyrənməkdir. Əlaqəli hiperbolik tənliklər sistemi başlanğıc və sərhəd şərtləri ilə tamamlanıb. Uyğun fərziyyələr altında biz bu problemi müəyyən bir fəzada operator-əmsal tənliyi üçün Koşi məsələsi kimi modelləşdirməklə qlobal həllinin mövcudluğunu göstəririk.

Açar sözlər: Timoşenko sistemi, qarışıq məsələ, çubuq, qeyri-xətti mənbə funksiyası, qlobal həll

Introduction

Connecting beams are one of the most important components of civil and mechanical devices with various structures. For this reason, the study of beams is of particular importance and they are widely studied in the mechanics of materials. A widely used mathematical model to describe the transverse vibrations of beams is based on the Tymoshenko beam theory developed by Timoshenko in the 1920s.

In 1921, Timoshenko [1] gave the following system of coupled hyperbolic equations

$$\begin{cases} pu_{tt} = \big(K(u_x - \phi)\big)_x, & in\ (0,L)\times R_+, \\ I_\rho \phi_{tt} = (EI\phi_x)_x + (u_t - \phi), & in\ (0,L)\times R_+, \end{cases} \quad (0.1)$$

together with boundary conditions of the form

$$EI\phi_x \Big|_{x=0}^{x=L} = 0\ ,\ (u_x - \phi)\Big|_{x=0}^{x=L} = 0,$$

as a simple model describing the transverse vibrations of a beam. Here t denotes the time variable, x is the space variable along the beam of length L, in its equilibrium configuration, u is the transverse displacement of the beam and ϕ is the rotation angle of the filament of the beam. The coefficients ρ, I_ρ, E, I and K are respectively the density (the mass per unit length), the polar moment of inertia of a cross section, Young's modulus of elasticity, the moment of inertia of a cross section, and the shear modulus.

Later, many studies were conducted for various generalizations of this mathematical model, and investigations in this field are still ongoing.

In this paper, the Timoshenko system with nonlinear dissipation and nonlinear source function is studied and the existence of a global solution of the problem is shown.

Statement of the problem and main result.

In the paper, we consider the following mixed problem in the domain

$Q = [0,\infty] \times [0,1]$:

$$\begin{cases} \rho\phi_{tt} - K(\phi_x - \psi)_x + |\phi_t|^{r_i - 1}\phi_t = f_1(\phi,\psi), \\ l_\rho\psi_{tt} - EI\psi_{xx} + K(\phi_x - \psi) + |\psi_t|^{r_2 - 1}\psi_t = f_2(\phi,\psi) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \phi(t,0) = \phi(t,1) = 0, \\ \psi(t,0) = \psi(t,1) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \phi(0,x) = \phi_0(x), & \phi_t(0,x) = \phi_1(x), \\ \psi(0,x) = \psi_0(x), & \psi_t(0,x) = \psi_1(x), \end{cases} \quad (3)$$

where

i) $\rho > 0, K > 0, l_\rho > 0, E > 0, I > 0, r_1 \geq 1, r_2 \geq 1$ are constants,

ii) $f_1(\phi,\psi)$, $f_2(\phi,\psi)$ are functions satisfying the local Lipschitz condition.

To study the problem (1), (3), let's define the following bilinear form in the Hilbert space for $w^i = (v_1^i, v_2^i, v_3^i, v_4^i)$, $i = 1,2$:

$$\langle w^1, w^2\rangle = K\int_0^1 (v_{1x}^1 - v_3^1)(v_{1x}^2 - v_3^2)dx + \rho\int_0^1 v_2^1 \cdot v_2^2 dx + EI\int_0^1 v_{3x}^1 \cdot v_{3x}^2 dx + l_\rho\int_0^1 v_4^1 \cdot v_4^2 dx. \quad (4)$$

It is easily seen that the bilinear form (4) defines a scalar product equivalent to the scalar product defined according to the Cartesian product in the space H.

By the scalar product in H we mean the scalar product defined as (4).

Let us denote $v_1 = \phi$, $v_2 = \phi_t$, $v_3 = \psi$, $v_4 = \psi_t$ and define the following operator in the space H:

$$D(A_0) = (H^2 \cap H_0^1) \times H_0^1 \times (H^2 \cap H_0^1) \times H_0^1,$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & -\frac{K}{\rho}\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{l_\rho}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{EI}{l_\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{K}{l_\rho} & 0 \end{pmatrix}$$

Also, let's define nonlinear operators in the space H as follows:

$$A_1(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ |v_2|^{r_1-1}v_2 \\ 0 \\ |v_4|^{r_2-1}v_4 \end{pmatrix}, F(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(v_1, v_3) \\ 0 \\ f_2(v_1, v_3) \end{pmatrix}.$$

Thus, we can rewrite the problem (1)-(3) in H using the operators defined above as follows:

$$w' = A_0 w + A_1(w) + F(w), \quad (5)$$

$$w(0) = w_0 \ . \quad (6)$$

Here, $w_0 = (v_{10}, v_{20}, v_{30}, v_{40})$, $v_{10} = \phi_0(x)$,$v_{20} = \phi_1(x)$,$v_{30} = \psi_0(x)$,

$v_{40} = \psi_1(x)$.

The following theorem on the solvability of the problem (5), (6) is true.

Theorem 1. *Assume that conditions i) and ii) are fulfilled. Then, for* $\forall T > 0$ *and* $\forall w_0 \in D(A_0)$ *, there exist such* $T' > 0$ *and unique*

$$w \in C^1([0,T]; H) \cap C([0,T]; D(A)),$$

which satisfies the problem (5)-(6) . If $w_0 \in H$*, then* $w \in C([0,T]; H)$*.*

If T_{max} *is the length of the maximum interval for the existence of that solution, then one of the following alternatives holds:*

a) $T_{max} = +\infty$

b) or $lim_{t \to T_{max}^{-0}} \int_0^1 [\phi_t^2(t,x) + \phi_x^2(t,x) + \psi_t^2(t,x) + \psi_x^2(t,x)]dx = +\infty$*.*

If f_1 and f_2 are the functions in the following form

$$f_1(\phi, \psi) = -|\phi|^{p-1}|\psi|^{p+1}\phi, f_2(\phi, \psi) = -|\phi|^{p+1}|\psi|^{p-1}\psi, p \geq 0 \ , \quad (7)$$

we can talk about the global solution of the considered problem.

In this case, the following theorem on the existence of a global solution to the problem (5)-(6) is true.

Theorem 2. *Suppose that conditions i) , ii) and (7) are fulfilled. Then, for* $\forall T > 0$ *and* $\forall w_0 \in D(A_0)$*, there exists such*

$$w \in C^1([0,T]; H) \cap C([0,T]; D(A)),$$

which satisfies the problem (5)-(6) . If $w_0 \in H$*, then* $w \in C([0,T]; H)$*.*

Proof of existence and uniqueness theorem

In order to prove Theorem 1, let us first prove some auxiliary lemmas.

Lemma 1. *A_0 is a linear maximal monotone operator in H.*

Proof. First, let's show that $\boldsymbol{A_0}$ is a monotone operator. From the definition, it follows that

$$A_0 w = (v_2, -\frac{K}{\rho}v_{1xx} + \frac{K}{\rho}v_{3x}, \frac{EI}{l_\rho}v_{3xx} - \frac{K}{l_\rho}v_{1x} + \frac{K}{p_\rho}v_3).$$

Then,

$$\langle Aw, w\rangle = K \cdot \int_0^1 (v_{2x} - v_4)\cdot(v_{1x} - v_3)\,dx +$$

$$+\rho \cdot \int_0^1 (\frac{K}{\rho}v_{1xx} - \frac{K}{\rho}v_{3x})\cdot v_2\,dx + EI \cdot \int_0^1 v_{4x}\cdot v_{3x}dx +$$

$$+l_\rho \int_0^1 (\frac{K}{l_\rho}v_{1x} + \frac{EI}{l_\rho}v_{3xx} - \frac{K}{p_\rho}v_3)\cdot v_4 dx =$$

$$= K\int_0^1 v_{2x}\cdot v_{1x}dx - K\int_0^1 v_{2x}\cdot v_3 dx - K\int_0^1 v_4\cdot v_{1x}dx +$$

$$+K\int_0^1 v_4\cdot v_3 dx + K\int_0^1 v_{1xx}\cdot v_2 dx - K\int_0^1 v_{3x}\cdot v_2 dx + EI\cdot\int_0^1 v_{4x}\cdot v_{3x}dx +$$

$$+K\int_0^1 v_{1x}\cdot v_4 dx + EI\cdot\int_0^1 v_{3xx}\cdot v_4 dx - K\int_0^1 v_3\cdot v_4 dx.$$

Integrating by parts in the fifth and ninth terms, we get

$$\langle A_0 w, w\rangle = 0.$$

So, $\boldsymbol{A_0}$ is a monotone operator. To show maximal monotonicity, we need to show that the image of $I + A_0$ coincides with H. In other words, it is necessary to show the existence of the solution $w \in D(A_0)$ of the equation

$$(I + A_0)w = g \quad (8)$$

for $\forall g \in H$.

If we write equation (8) explicitly, we get the following problem:

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = g_1 \\ -\frac{K}{\rho}v_{1xx} + \frac{K}{\rho}v_{3x} + v_2 = g_2 \\ v_3 - v_4 = g_3 \\ -\frac{EI}{l_\rho}v_{3xx} + \frac{K}{p_\rho}v_3 - \frac{K}{l_\rho}v_{1x} + v_4 = g_4 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} v_1(0) = v_1(1) = 0 \\ v_2(0) = v_2(1) = 0 \\ v_3(0) = v_3(1) = 0 \\ v_4(0) = v_4(1) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Here, $g_1 \in H_0^1$, $g_2 \in L_2(0,1)$,$g_3 \in H_0^1$, $g_4 \in L_2(0,1)$. If we substitute v_2 and v_4 in other equations, we obtain the following problem:

$$\begin{cases} -Kv_{1xx} + Kv_{3x} + \rho v_1 = \tilde{g}_2 \\ -EIv_{3xx} + Kv_3 - Kv_{1x} + l_\rho v_3 = \tilde{g}_4 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} v_1(0) = v_1(1) = 0 \\ v_3(0) = v_3(1) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Here, $\tilde{g}_2 = \rho(g_2 + g_1)$, $\tilde{g}_4 = l_\rho(g_4 + g_3)$, $\tilde{g}_2, \tilde{g}_4 \in H_0^1 \times H_0^1$.

Let's define the following bilinear form:

$$B(V,U) = K \cdot \int_0^1 (v_{1x} - v_3) \cdot (u_{1x} - u_3)\, dx + EI \cdot \int_0^1 v_{3x} \cdot u_{3x} dx$$
$$+\rho \cdot \int_0^1 v_1 \cdot u_1 dx + l_\rho \cdot \int_0^1 v_3 \cdot u_3 dx,$$

where, $V = (v_1, v_3)$, $U = (u_1, u_3) \in H_0^1 \times H_0^1$. It's obvious that $B(V,U)$ is a bilinear form defined in $H_0^1 \times H_0^1$.

Using the Hölder's inequality, we derive that

$$|B(V,U)| \le 2K \cdot \int_0^1 |v_{1x} - v_3|^2\, dx + 2K \cdot \int_0^1 |u_{1x} - u_3|^2\, dx$$
$$+2EI \cdot \int_0^1 |v_{3x}|^2 dx + 2EI \cdot \int_0^1 |u_{3x}|^2 dx + 2\rho \cdot \int_0^1 |v_1|^2 dx$$
$$+2\rho \cdot \int_0^1 |u_1|^2 dx + +2l_\rho \cdot \int_0^1 |v_3|^2 dx + 2l_\rho \cdot \int_0^1 |u_3|^2 dx\ . \quad (13)$$

On the other hand,

$$\int_0^1 |v_{1x} - v_3|^2 dx \le 2 \cdot \int_0^1 |v_{1x}|^2 dx + 2 \cdot \int_0^1 |v_3|^2 dx. \quad (14)$$

It follows from (13) and (14) that

$$|B(V,U)| \le c \cdot (\|V\|^2_{H_0^1 \times H_0^1} + \|U\|^2_{H_0^1 \times H_0^1})\ ,$$

i.e. $B(V,U)$ is continuous. Taking $V = U$ gives the following expression:

$$B(U,U) = K \cdot \int_0^1 |u_{1x} - u_3|^2\, dx + EI \cdot \int_0^1 |u_{3x}|^2 dx + \rho \cdot \int_0^1 |u_1|^2 dx +$$
$$+l_\rho \cdot \int_0^1 |u_3|^2 dx = K \cdot \int_0^1 |u_{1x}|^2\, dx + (K + l_\rho) \cdot \int_0^1 |u_3|^2 dx +$$
$$+EI \cdot \int_0^1 |u_{3x}|^2 dx + \rho \cdot \int_0^1 |u_1|^2 dx - 2K \cdot \int_0^1 u_{1x} \cdot u_3 dx. \quad (15)$$

Using Hölder's and Young's inequalities, let's estimate the last addend as follows:

$$\left| 2K \cdot \int_0^1 u_{1x} \cdot u_3 dx \right| \le K \left[\frac{K}{K + l_\rho} \cdot \int_0^1 |u_{1x}|^2\, dx + \frac{1}{\frac{K}{K + l_\rho}} \cdot \int_0^1 |u_3|^2\, dx \right] =$$
$$= \frac{K^2}{K + l_\rho} \cdot \int_0^1 |u_{1x}|^2\, dx + (K + l_\rho) \cdot \int_0^1 |u_3|^2\, dx\ . \quad (16)$$

The following inequality is obtained from (15) and (16):

$B(U,U) \ge c \cdot \|U\|^2_{H_0^1 \times H_0^1}$,

$c = min\left\{\frac{K \cdot l_\rho}{K + l_\rho}, EI\right\}$.

Therefore, the bilinear form B(U,V) satisfies all conditions of the Lax-Milgram theorem. Therefore, the equation

$$B(V,U) = (G,U), \forall U \in H_0^1 \times H_0^1$$

has a solution $V \in H_0^1 \times H_0^1$, where $G = (\tilde{g}_2, \tilde{g}_4)$.

So, problem (11), (12) has a unique solution $v_1 \in H_0^1$, $v_3 \in H_0^1$.

The lemma is proved.

Lemma 2. $A_1(\cdot)$ *is a monotone semicontinuous and bounded operator acting on* H.

Proof. If $w = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in D(A_0)$, then $v_2, v_4 \in H_0^1$. In this case,

$$\|A_1(w)\|^2 = \int_0^1 |v_2|^{2r_1}\,dx + \int_0^1 |v_4|^{2r_2}\,dx \le \|v_2\|^{2r_1}_{C[0,1]} + \|v_4\|^{2r_2}_{C[0,1]}$$

$$\le c \cdot (\|v_2\|^{2r_1}_{H_0^1} + \|v_2\|^{2r_1}_{H_0^1}) = c \cdot (\|w\|_H),$$

i.e. $A_1(\cdot)$ is a bounded operator.

Suppose that, $w = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ və $w, z \in D(A_0)$. Then,

$$(A_1(w) - A_1(z), w - z) = \int_0^1 (|v_2|^{r_1 - 1} \cdot v_2 - |z_2|^{r_2 - 1} \cdot z_2) \cdot (v_2 - z_2)dx +$$

$$+ \int_0^1 (|v_4|^{r_2 - 1} \cdot v_4 - |z_4|^{r_2 - 1} \cdot z_4) \cdot (v_4 - z_4)dx \ge 0\ .$$

Let's take any $w, z, \xi \in D(A_0)$:

$w = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$.

Then,

$$\langle A(w + t \cdot z), \xi \rangle = \int_0^1 |v_2 + t \cdot z_2|^{r_1 - 1} \cdot (v_2 + t \cdot z_2) \cdot \xi_2 dx +$$

$$+ \int_0^1 |v_4 + t \cdot z_4|^{r_2 - 1} \cdot (v_4 + t \cdot z_4) \cdot \xi_4 dx,\ t > 0.$$

From here, it follows that

$$\lim_{t \to 0} (A_1(w + t \cdot z), \xi) = \langle A_1(w), \xi \rangle.$$

That is, $A_1(\cdot)$ is semicontinuous.

The lemma is proved.

According to the Brezis theorem [8], the sum of a maximal monotone operator, a monotone semicontinuous operator, and a bounded operator is the maximal monotone operator.

Since $A_0(\cdot)$+$A_1(\cdot)$ is a maximal monotone operator, and $F(w)$ is a nonlinear operator satisfying the local Lipschitz condition, the Cauchy problem (5), (6) has a unique local solution. That is, for $\forall w_0 \in D(A_0)$, there exist such a $T' > 0$ and such a $w \in C^1([0,T]; H) \cap C([0,T]; D(A))$ that satisfies the problem (5)-(6). If $w_0 \in H$, then $w \in C([0,T]; H)$.

Proof of Theorem 2 . According to Theorem 1, if we show the a priori estimate

$$\|w(t)\| \le c,\ 0 \le t \le T;$$

of the problem (5)-(6), we will have proved Theorem 2.

Therefore, if we obtain the a priori estimate

$$\int_0^1 [\phi_t^2(t,x) + \phi_x^2(t,x) + \psi_t^2(t,x) + \psi_x^2(t,x)]dx \le C < +\infty \ (17)$$

for the solution of problem (1)-(4), we can globally continue the solution defined by Theorem 1.

To obtain the estimation (17), let's multiply the first equation of system (1) by φ_t and the second by ψ_t and integrate over the domain $[0,1] \times [0,T']$.

$$\frac{\rho}{2}\int_0^1 |\varphi_t|^2 dx - K\int_0^t\int_0^1 (\varphi_x - \psi)_x \cdot \varphi_t \, dxdt + \int_0^t\int_0^1 |\varphi_t|^{r_1+1} dxdt =$$

$$= \frac{\rho}{2}\int_0^1 |\varphi_1(x)|^2 dx + \int_0^t\int_0^1 f_1(\varphi,\psi)\cdot\varphi_t \, dxdt \ , \ (18)$$

$$\frac{l_\rho}{2}\int_0^1 |\psi_t|^2 dx + \frac{EI}{2}\int_0^1 |\psi_x|^2 dx + K\int_0^t\int_0^1 (\psi_x - \varphi)_x \cdot \psi_t \, dxdt =$$

$$= \frac{I_\rho}{2}\int_0^1 |\psi_0(x)|^2 dx + \int_0^t\int_0^1 f_2(\varphi,\psi)\cdot\psi_t \, dxdt \ . \ (19)$$

If we consider that

$$\frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}|\varphi(t,x)\cdot\psi(t,x)|^{p+1} = f_1(\varphi(t,x),\psi(t,x))\cdot\varphi_t(t,x) +$$

$$+ f_2(\varphi(t,x),\psi(t,x))\cdot\psi_t(t,x),$$

by summing (18) and (19), we get that

$$\frac{\rho}{2}\int_0^1 |\varphi_t|^2 dx + \frac{l_\rho}{2}\int_0^1 |\psi_t|^2 dx + \frac{EI}{2}\int_0^1 |\psi_x|^2 dx + \frac{K}{2}\int_0^1 |\varphi_x + \psi|^2 dx +$$

$$+ \int_0^t\int_0^1 |\varphi_t|^{r_1+1} dxdt + \int_0^t\int_0^1 |\psi_t|^{r_2+1} dxdt = \frac{\rho}{2}\int_0^1 |\varphi_1(x)|^2 dx + \frac{l_\rho}{2}\int_0^1 |\psi_1(x)|^2 dx +$$

$$+ \frac{EI}{2}\int_0^1 |\psi_{0x}|^2 dx + \frac{K}{2}\int_0^1 |\varphi_{0x}(x) + \psi_0(x)|^2 dx +$$

$$+ \frac{1}{p+1}\int_0^1 |\varphi(t,x)\cdot\psi(t,x)|^{p+1} dx. \ (20)$$

Then we get from (20) that

$$\int_0^1 |\varphi_t|^2 dx + \int_0^1 |\psi_t|^2 dx + \int_0^1 |\varphi_x + \psi|^2 dx + \int_0^1 |\psi_x|^2 dx +$$

$$+\int_0^t\int_0^1 |\varphi_t|^{r_1+1}dxdt+\int_0^t\int_0^1 |\psi_t(t,x)|^{2}dxdt+$$

$$+\frac{1}{p+1}\int_0^1 |\varphi(t,x)\cdot\psi(t,x)|^{p+1}\,dx\le c$$

This completes the proof.

REFERENCES

[1] Ammar-Khodja F., Benabdallah A. Munoz Rivera J. E. and Racke R., Energy decay for Timoshenko systems of memory type. J. Differential Equations 194 no. 1 (2003), 82–115.

[2] Ammar-Khodja F., Kerbal S. and Soufyane A. E., Stabilization of the nonuniform Timoshenko beam, J. Math. Anal. Appl.,Vol. 327 # 1 (2007), 525-538.

[3] Farkhadova Y.M., Energy decay in one class Timoshenko-type system, Magistrantların XVII Respublika Elmi konfransı, III hissə, səh.15-16, Sumqayıt-2017, 11-12 May.

[4] Feng D-X, Shi D-H, and Zhang W., Boundary feedback stabilization of Timoshenko beam with boundary dissipation. Sci. China Ser. A 41 no. 5 (1998), 483–490.

[5] Fern´andez Sare, H. D., and Racke, R., On the stability of damped Timoshenko systems: Cattaneo versus Fourier law, Arch. Rational Mech. Anal., 194 (1) (2009), 221-251.

[6] Guesmia, A. and Messaoudi, S. A., General energy decay estimates of Timoshenko systems with frictional versus viscoelastic damping, Math. Meth. Appl. Sci., 32 (16) (2009), 2102-2122.

[7] Guesmia, A. and Messaoudi, S. A., On the control of a viscoelastic damped Timoshenko-type system, Appl. Math. Compt., 206 2 (2008), 589-597.

[8] H. Brezis, Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Nort-Holland Math. Stud. , Vol 5, Notas de Mathematica (50), North-Holland Publishing Co./American Elsevier, Publishing Co., Inc., Amsterdam-London/New York 1973 (in French).

[9] Kim J.U. and Renardy Y., Boundary control of the Timoshenko beam, SIAM J. Control Optim. 25 no. 6 (1987),1417–1429.

[10] Komornik V., Exact controllability and stabilization. The multiplier method. RAM: Research in Applied Mathematics. Masson, Paris; John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1994.

[11] Messaoudi S. A. and Soufyane A., Boundary stabilization of a nonlinear system of Timoshenko type, Nonlinear Analysis 67 (2007), 2107-212

[12] Messaoudi S. A., and Mustafa, M. I., A stability result in a memory-type Timoshenko system, Dyn. Sys. Appl., 18 (3) (2009), 457-468.

[13] Messaoudi S. A., and Mustafa, M. I., On the internal and boundary stabilization of Timoshenko beams, Nonl. Differ. Eqns. Appl. 15 (2008), 655-671.

[14] Messaoudi S. A., and Mustafa, M. I., On the stabilization of the Timoshenko system by a weak nonlinear dissipation, Math. Meth. Appl. Sci., 32 (4) (2009), 454-469.

[15] Messaoudi S. A., and Said-Houari, B., Uniform decay in a Timoshenko-type system with past history J. Math. Anal. Appl., 360 (2) (2009), 459-475.

[16] Messaoudi S. A., Pokojovy, M., and SaidHouari, B., Nonlinear damped Timoshenko systems with second sound{global existence and exponential stability, Math. Meth. Appl. Sci., 32 (5) (2009), 505-534.

[17] Munoz Rivera J.E. and Racke R., Global stability for damped Timoshenko systems, Discrete Contin.Dyn. Syst. 9 no. 6 (2003), 1625–1639.

[18] Munoz Rivera J.E. and Racke R., Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems-global existence and exponential stability, J. Math. Anal. Appl. 276 (2002), 248-276.

[19] Munoz Rivera, J. E. and Fern´andez Sare, H. D., Stability of Timoshenko systems with past history,J. Math. Anal. Appl., 339 (1) (2008), 482-502.

[20] Munoz Rivera, J. E., and Racke, R., Timoshenko systems with indefinite damping, J. Math. Anal.Appl., 341 (2)(2008) 1068-1083.

[21]Pazy A, Semi-groups of linear Operator and Applications to Partial Differential Equations.Springer, New York (1983)

[22] Raposo C.A., Ferreira J., Santos M.L., and Castro N.N.O, Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings, Applied Math Letters 18 (2005), 535-541.

[23] Santos M., Decay rates for solutions of a Timoshenko system with a memory condition at the boundary, Abstr. Appl. Anal. 7 no. 10 (2002), 531–546.

[24] Santos, M. L., Almeida J unior, D.S., Mu˜noz Rivera, J.E., The stability number of the Timoshenko system with second sound, J. Di . Eqns. 253 (2012), 2715-2733 .

[25] Shi D-H, Hou S-H., and Feng D-X, Feedback stabilization of a Timoshenko beam with an end mass, Internat. J. Control 69 no. 2 (1998), 285–300.

[26] Shi D-H, and Feng D-X and Yan Q-X, Feedback stabilization of rotating Timoshenko beam with adaptive gain, Internat. J. Control 74 no. 3 (2001), 239–251.

[27] Shi D-H, and Feng D-X, Exponential decay of Timoshenko beam with locally distributed feedback, IMA J. Math. Control Inform. 18 no. 3 (2001), 395–403.

[28] Shi D-H, and Feng D-X, Exponential decay rate of the energy of a Timoshenko beam with locally distributed feedback, ANZIAM J. 44 no. 2 (2002), 205-220 .

[29] Soufyane A. and Wehbe A., Uniform stabilization for the Timoshenko beam by a locally distributed damping, Electron. J. Differential Equations no. 29 (2003), 1-14.

[30] Timoshenko S., On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismaticbars, Philisophical magazine 41 (1921), 744-746.

[31] V. Barbu, Nonlinear semigroups and Differential Equations in Banach spaces, Editure Academici Romane, 1974.

[32] Рзаева Н.А., Фархадоа Е.М., Решение смешанных задач для систем Тимошенко и Брессе методом динамической граничной регуляризацией, "Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики", Материалы XII Международной конференции, приуроченной к 85-летию профессора Алишаева М.Г., Махачкала-2017, стр. 230-231.

2022. Volume 6, Number 2 *Pages 84-91*

UOT 539.3

VIBRATIONS OF REINFORCED INHOMOGENEOUS, WEAKENED CYLINDRICAL PANELS IN CONTACT WITH A VISCOELASTIC MEDIUM

LATIFOV F.S., MOVSUMOVA A.H.

Azerbaijan University of Architecture and Construction,

Ministry of Science and Education Republic of Azerbaijan,

Institute of Mathematics and Mechanics

flatifov@mail.ru

aytenmovsumova@mail.ru

ABSTRACT

The free vibrations of an anisotropic cylindrical panel with a rectangular profile, reinforced with shafts, inhomogeneous throughout the thickness, reinforced with joints, and damaged by hole, in dynamic contact with a viscoelastic medium, have been studied. Using the variational principle of Hamilton-Octrogradsky, a frequency equation was established to calculate the free vibration frequencies of an orthotropic cylindrical panel with a rectangular profile, which is inhomogeneous throughout its thickness, located on a visco-elastic base, all edges are jointed, and damaged by hole. Then roots were found and the effect of physical and mechanical characteristics determining the environment, shafts and cover on these roots was studied.

Keywords: inhomogeneous cylindrical panel; viscous-elastic base; shaft; free vibrations.

КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНЫХ ОСЛАБЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ В КОНТАКТЕ С ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДОЙ

РЕЗЮМЕ

Исследованы свободные колебания анизотропной цилиндрической пластины прямоугольного профиля, неоднородными по толщине, подкрепленной ребрами и поврежденной отверстием, при динамическом контакте с вязкоупругой средой. С использованием вариационного принципа Гамильтона-Остраградского установлено частотное уравнение для расчета частот свободных колебаний ортотропной цилиндрической пластины прямоугольного профиля, неоднородном по толщине, поврежденной отверстием, расположенной на вязкоупругом основании. Затем находили корни и изучали влияние на эти корни физико-механических свойств, характеризующих среду, ребро и покров.

Ключевые слова: неоднородная цилиндрическая пластина, вязкоупругая среда, ребро, свободные колебания.

ÖZLÜ-ELASTİKİ MÜHİTLƏ KONTAKTDA OLAN MÖHKƏMLƏNDİRİLMİŞ QEYRİ-BİRCİNS, ZƏİFLƏDİLMİŞ SİLİNDRİK LÖVHƏLƏRİN RƏQSLƏRİ

XÜLASƏ

Düzbucaqlı profilli, millərlə möhkəmləndirilmiş, qalınlığı boyunca qeyri-bircins, və deşiklə zədələnmiş, özlü elastik mühitlə dinamik təmasda olan anizotrop silindrik lövhənin sərbəst rəqsləri tədqiq edilmişdir. Hamilton-Ostraqradski variasiya prinsipindən istifadə edərək, qalınlığı boyunca qeyri-bircins olan, özlü-elastik əsas üzərində yerləşən, bütün kənarları bərkidilmiş, deşiklə zədələnmiş, düzbucaqlı profilli ortotrop silindrik lövhənin sərbəst rəqs tezliklərini hesablamaq üçün tezlik tənliyi qurulmuşdur. Sonra köklər tapılmış və ətraf mühiti, milləri və örtüyü xarakterizə edən fiziki-mexaniki xüsusiyyətlərin bu köklərə təsiri öyrənilmişdir.

Açar sözlər: qeyri-bircins silindrik lövhə, özlü-elastik mühit, mil, sərbəst rəqslər.

INTRODUCTION: In [1,2], the free vibrations of anisotropic, inhomogeneous, reinforced, non-weakened by holes cylindrical panels with rectangular profile in contact with a

viscoelastic medium were studied, free vibrations frequencies were found, and the effect of parameters characterizing the construction on these frequencies was studied.

In [3], the problems of oscillating motions of cylindrical and conical covers, taking into account the resistance of the external environment (Pasternak), were studied and a comprehensive report was conducted, the results were presented in tables and curves of the relationship between characteristic parameters.

In [4], the solution of the problems of practical importance is given, taking into account the Fuss-Winkler resistance of rectangular and circular panels and cylindrical covers and the resistance of the viscoelastic base.

PROBLEM STATEMENT: In this article, the problem of free vibrations of an orthotropic cylindrical panel located on a visco-elastic foundation, reinforced with shafts, inhomogeneous throughout the thickness, all edges are jointed and damaged by rectangular hole is solved. The problem was solved based on the application of the Hamilton-Ostrogradsky variation principle. For this, the total energy of the system is written:

$$J = V_p + V_k + V_{1p} + V_{1k} + A_0 \qquad (1)$$

Here V_p - is the potential energy of the cylindrical panel, V_k - is the kinetic energy of the cylindrical panel, V_{1p} - potential energy of the shafts, V_{1k} - kinetic energy of the shafts, A_0 - is the work done by the forces acting on the orthotropic cylindrical panel by the viscoelastic base in the displacements of the points of the panel.

We will use a three-dimensional functional to account for inhomogeneities throughout the thickness of the cylindrical plate. There are different ways to account for inhomogeneity. One of them is consist of to accept Young's modulus and material density through thickness as a function of variable coordinate [6]. We assume that Puasson's ratio is constant. In this case, the total energy of the cylindrical panel is as follows:

$$V_p = \frac{R}{2}\iint\limits_{s-s_0}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \rho(z)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right)dxd\varphi dz$$

$$V_k = \frac{R}{2}\iint\limits_{s-s_0}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\rho(z)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right)dxd\varphi dz$$

(2)

Here, h - the thickness of the cylindrical panel, S - is the area of the panel, S_0 - is the area corresponding to the section.

$$\sigma_{11} = b_{11}(z)\varepsilon_{11} + b_{12}(z)\varepsilon_{22};\ \ \sigma_{22} = b_{12}(z)\varepsilon_{11} + b_{22}(z)\varepsilon_{22};\ \ \sigma_{12} = b_{66}(z)\varepsilon_{12}$$

(3)

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x};\ \ \varepsilon_{22} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w;\ \ \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \qquad (4)$$

Using (3), we can write the functional (2) below:

$$V_p = \frac{R}{2}\iint\limits_{s-s_0}\left\{\tilde{b}_{11}\varepsilon_{11}^2 + 2\tilde{b}_{12}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 2\tilde{b}_{26}\varepsilon_{12}\varepsilon_{22} + 2\tilde{b}_{16}\varepsilon_{11}\varepsilon_{12} + \tilde{b}_{22}\varepsilon_{22}^2 + \tilde{b}_{66}\varepsilon_{12}^2\right\}dxd\varphi$$

$$V_k = \iint\limits_{s-s_0}\left(\rho\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right)\right)dxd\varphi \qquad (5)$$

Here,

$$\tilde{b}_{11} = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_{11}(z)dz;\ \tilde{b}_{12} = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_{12}(z)dz;\quad \tilde{b}_{22} = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_{22}(z)dz;\ \tilde{b}_{66} = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_{66}(z)dz;$$

$$b_{11}(z) = \frac{E_1(z)}{1-\nu_1\nu_2};\quad b_{22}(z) = \frac{E_2(z)}{1-\nu_1\nu_2};$$

$$b_{66}(z) = G_{12}(z) = G(z);\ b_{12}(z) = \frac{\nu_2 E_1(z)}{1-\nu_1\nu_2} = \frac{\nu_1 E_2(z)}{1-\nu_1\nu_2}$$

The energy of the shafts is as follows [5]:

$$V_{1p} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k_1}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[\tilde{E}_i F_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 + \tilde{E}_i J_{yi}\left(\frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x^2}\right)^2 + \tilde{E}_i J_{zi}\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\right)^2 + G_i J_{kpi}\left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial x}\right)^2\right]dx$$

$$V_{1k} = \sum_{i=1}^{k_1}\tilde{\rho}_i F_i\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t}\right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i}\left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t}\right)^2\right]dx$$

(6)

In expressions (2)-(6) V_{1p} - the total energy of shafts regularly located along the length of the generator on the surface of a inhomogeneous cylindrical panel, V_{1k} - kinetic energy of the shafts, u, v, w - displacements of the points of the cylindrical panel, R, h - respectively, the radius of curvature and thickness of the cylindrical plate, $\tilde{E}_i$ -modulus of elasticity of the i shaft, $\tilde{\rho}_i$ - the density of the i shaft material, F_i -cross-sectional area of the i shaft, I_{yi}, I_{kpi} - moments of inertia of the cross section of the i shaft, G_i - modulus of elasticity in sliding of the i shaft, u_i, v_i, w_i - displacement of the points of i shaft, $\rho_i = \int\limits_{-h}^{h}\rho(z)z^i dz$, $\frac{1}{E_i} = \int_{-h}^{h}\frac{z^i}{E(z)}$, k_1 - the number of shaft and $E_1(z) = \tilde{E}_1 f(z)$, $E_2(z) = \tilde{E}_2 f(z)$, $G(z) = \tilde{G}f(z)$.

$$\varphi_{kpj} = -\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=x_j},\quad \varphi_{kpi} = -\left.\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\vartheta}{\partial R}\right)\right|_{y=y_i}$$

It is assumed that the force acting on the cylindrical cover by the viscoelastic medium is expressed by the deflection $W(x,y,z)$ of the cylindrical cover as follows:

$$q_z = k_v w - k_p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\int_0^t \Gamma(t-\tau)w(\tau)d\tau \tag{7}$$

Here, k_v - the Winkler coefficient, k_p - is the Pasternak coefficient, which is found by experiment, t - is time, and $\Gamma(t-\tau)$ - is the viscosity kernel.

The potential energy of the forces acting on the orthotropic cylindrical panel by the viscoelastic base is equal to the work done by these forces on the displacements of the points of the panel with the opposite sign:

$$A_0 = -R\int_0^l\int_0^{\phi_0} q_z w dx d\varphi \tag{8}$$

Boundary conditions are also added to the energy expression (1). In the case of a hinge joint

$$u = v = w = M_x = 0 \qquad x = 0; l \quad \text{üçün}$$

$$u = v = w = M_\varphi = 0 \quad \varphi = 0; \varphi_0 \quad \text{üçün} \tag{9}$$

It is assumed that the coordinate axes coincide with the main curvature lines of the panel, and the shafts are in rigid contact with the coating along these lines:

$$u_i(x) = u(x,y_i) + h_i\varphi_1(x,y_i),\ \ \vartheta_i(x) = \vartheta(x,y_i) + h_i\varphi_2(x,y_i)$$

$$w_i(x) = w(x,y_i),\ \ \varphi_i(x) = \varphi_1(x,y_i),\ \ \varphi_{kpi}(x) = \varphi_2(x,y_i);\ \ h_i = 0{,}5h + H_i^1$$

$$\varphi_j(x) = \varphi_2(x_j,y),\ \ \varphi_{kpj}(x) = \varphi_2(x_j,y);\ \ h_j = 0{,}5h + H_j^1 \tag{10}$$

Here, H_i^1 - the distance of the axis of the i shaft from the surface of the cylindrical shell, φ_i, φ_{kpi} - are the turning and twisting angles of the cross-sections of the shaft and are expressed by the displacements of the cylindrical cover as follows:

$$\varphi_{kpi}(x) = \varphi_2(x,y_i) = -\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\vartheta}{R}\right)\Bigg|_{y=y_j}$$

As a result, the investigation of the free vibrations of a cylindrical panel, which is located on a visco-elastic base, is inhomogeneous throughout its thickness, is reinforced by joints, and is reinforced with shafts is brought to the integration of the total energy (1) within the boundary conditions (9) and (10) contact conditions (10) and the application of the Hamilton-Ostrogradsky variational principle:

$$\delta W = 0$$

Here, $W = \int_{t'}^{t''} J dt$ - Hamilton effect, t' and t'' are given arbitrary instants of time.

$$J = V_k + V_{1k} - V_p - V_{1p} - A_0$$

(11)

Let us find the displacements of the cylindrical panel as follows:

$$u = u_0 \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{k\pi\varphi}{\varphi_0}\sin\omega t;$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{k\pi\varphi}{\varphi_0}\sin\omega t;$$

$$w = w_0 \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{k\pi\varphi}{\varphi_0}\sin\omega t.$$

(12)

Here, u_0, v_0, w_0 - unknown constants, m, k - are the wave numbers in the longitudinal and transverse directions of the cylindrical panel, respectively.

Using $\iint\limits_{S-S_0} = \iint\limits_{S} - \iint\limits_{S_0}$ a property of the integral, if we substitute statements (12) in (5), for the total energy of a cylindrical panel with a rectangular profile, inhomogeneous throughout its thickness, jointed at all edges, reinforced with shafts, and weakened by hole, we get:

$$V = V_k + V_p = \frac{R}{4}\left\{\left[\tilde{b}_{11}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + 2\tilde{b}_{66}\right]u_0^2 + \left[\tilde{b}_{22}\left(\frac{k\pi}{\varphi_0 R}\right)^2 + \tilde{b}_{66}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right]\vartheta_0^2 + \right.$$

$$+ \frac{\tilde{b}_{22} l\varphi_0}{4} w_0^2 + 4\left[\tilde{b}_{26}\left(\frac{k\pi}{\varphi_0 R}\right)^2 + \tilde{b}_{16}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right]u_0\vartheta_0\Bigg\}\times \tag{13}$$

$$\times\left\{\frac{l\varphi_0}{2} - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{k_1+1} - 2\varphi_* R\right) - \frac{\varphi_0}{2k\pi}\cos\frac{2k\pi}{k_1+1}\sin\frac{2k\pi}{\varphi_0}\left(\frac{\varphi}{k_1+1} - 2\varphi_* R\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{2}a - \frac{l}{2m\pi}\sin\frac{2m\pi a}{l}\cos\frac{2m\pi}{l}(2l_1 + a)\right]\right\}\sin^2\omega t$$

The total energy of shaft i, which is inhomogeneous throughout its thickness, is jointed at all edges, and is located on the surface of the panel is as follows:

$$V_i = \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{l}\left\{\tilde{E}_i F_i \sin^2\frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0}u_0^2 + \left[\tilde{E}_i J_{yi}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \sin^2\frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0} + \tilde{G}_i J_{kpi}\cos^2\frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0}\right]w_0^2 + \right.$$

$$\left.+\left[\tilde{E}_i J_{zi}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \frac{\tilde{G}_i J_{kpi}}{R^2}\right]\sin^2\frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0}v_0^2 + \frac{\tilde{G}_i J_{kpi}}{R^2}\frac{k\pi}{l\varphi_0}\sin\frac{2k\pi\varphi_i}{\varphi_0}\vartheta_0 w_0\right\}\times\sin^2\omega t + \tag{14}$$

$$+\frac{\rho_i F_i l\omega^2}{2}\left\{u_0^2\sin^2\frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0}+\left(1+\frac{J_{kpi}}{F_i}\right)\times\vartheta_0^2\sin^2\frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0}+\left[\sin^2\frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0}+\frac{J_{kpi}}{F_i}\left(\frac{k\pi}{l\varphi_0}\right)^2\times\cos^2\frac{k\pi\varphi_i}{\varphi_0}\right]w_0^2+\right.$$

$$\left.+\frac{J_{kpi}}{F_i}\frac{k\pi}{l\varphi_0}\sin\frac{2k\pi\varphi_i}{\varphi_0}\vartheta_0 w_0\right\}\sin^2\omega t$$

If we replace expressions (12), (7) in (8), we can calculate the work done by the forces acting on the panel, which is inhomogeneous throughout its thickness , all edges are jointed, and reinforced with shafts, in the displacements of the points of the panel by the visco-elastic base.

$$A_0=-R\left\{\left[k_\nu+k_p\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2}+\frac{k^2\pi^2}{\varphi_*^2R^2}\right)\right]\sin^2\omega t-\frac{A\omega^2}{\omega^2+\psi^2}\left[\frac{\psi}{\omega^2}\sin^2\omega t-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t+\frac{1}{\omega}e^{-\psi t}\sin\omega t\right]\right\}\left\{\frac{l\varphi_0}{2}-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{k_1+1}-2\varphi_*R\right)-\frac{\varphi_0}{2k\pi}\cos\frac{2k\pi}{k_1+1}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sin\frac{2k\pi}{\varphi_0}\left(\frac{\varphi}{k_1+1}-2\varphi_*R\right)\right]\left[\frac{1}{2}a-\frac{l}{2m\pi}\sin\frac{2m\pi a}{l}\cos\frac{2m\pi}{l}(2l_1+a)\right]\right\}w_0^2 \qquad (15)$$

With the help of expressions (13), (14), (15), we get for the Hamilton effect:

$$W=\left\{\left\{\frac{lR\varphi_0}{8}\left[\tilde{b}_{11}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2+2\tilde{b}_{66}\right]+\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{k_1}\left(\tilde{E}_i F_i\sin^2\frac{k\pi\varphi_1}{\varphi_0}+\frac{\rho_i F_i l\omega^2}{2}\sin^2\frac{k\pi\varphi_1}{\varphi_0}\right)\right\}u_0^2+\right.$$

$$+\left\{\frac{lR\varphi_0}{8}\left[\tilde{b}_{22}\left(\frac{k\pi}{\varphi_0R}\right)^2+\tilde{b}_{66}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right]+\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{k_1}\left[\tilde{E}_i J_{zi}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2+\frac{\tilde{G}_i J_{kpi}}{R^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\rho_i F_i l\omega^2}{2}\left(1+\frac{J_{kpi}}{F_i}\right)\right]\sin^2\frac{k\pi\varphi_1}{\varphi_0}\right\}\vartheta_0^2+\left\{\frac{\tilde{b}_{22}l\varphi_0}{4}+\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{k_1}\left[\tilde{E}_i J_{yi}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sin^2\frac{k\pi\varphi_1}{\varphi_0}+\tilde{G}_i J_{kpi}\cos^2\frac{k\pi\varphi_1}{\varphi_0}\right]-\frac{Rl}{4(\omega^2+\psi^2)}(\cos\omega t'-\cos\omega t'')\times\right. \qquad (16)$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{2}(t''-t')-\frac{\sin 2\omega t'-\sin 2\omega t''}{4\omega}\right]^{-1}-R\left[\frac{\omega l\varphi_0}{4(\omega^2+\psi^2)}\left(\frac{\psi}{\omega}e^{\psi t}-e^{\psi t}\right)+\frac{k_\vartheta\varphi_0 l}{4}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+k_p\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2}+\frac{k^2\pi^2}{R^2\varphi_0^2}\right)\frac{\varphi_0 l}{4}\right]\right\}w_0^2+\frac{lR\varphi_0}{2}\left[\tilde{b}_{26}\left(\frac{k\pi}{\varphi_0R}\right)^2+\tilde{b}_{16}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right]u_0\vartheta_0+$$

$$\left.\left[\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2\sum_{i=1}^{k_1}\frac{\tilde{G}_i J_{kpi}}{R^2}\frac{k\pi}{l^2\varphi_0}\sin^2\frac{k\pi\varphi_1}{\varphi_0}+\frac{k\pi}{\varphi_0}\sum_{i=1}^{k_1}\frac{\rho_i F_i\omega^2}{2}\frac{J_{kpi}}{F_i}\sin\frac{2k\pi\varphi_1}{\varphi_0}\right]u_0\vartheta_0\right\}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}(t''-t')-\frac{\sin 2\omega t'-\sin 2\omega t''}{4\omega}\right]$$

From the stationarity condition of the W function, we get the following system:

$$1)\ \frac{\partial W}{\partial u_0}=0;\ 2)\ \frac{\partial W}{\partial v_0}=0;\ 3)\ \frac{\partial W}{\partial w_0}=0. \qquad (17)$$

Since the system (17) is a system of homogeneous linear equations, a necessary and sufficient condition for the existence of its non-trivial solution is that the principal determinant is equal to zero. As a result, we get the following frequency equation:

$$\det\left\|a_{ij}\right\|=0, i, j=1,3 \qquad (18)$$

PROBLEM SOLUTION: Equation (18) is a transcendental equation with respect to its ω frequency. Its roots are complex numbers, the real part of which characterizes the frequencies of the vibration, and the imaginary part of which characterizes the decay of the vibration. The roots of equation (18) were found by numerical method. For this, the left side of the equation (18) is divided into two equations by writing $\omega=\omega_1+i\omega_2$, and the interval corresponding to the sign change is calculated. Then, the found interval was reduced, and the values of the frequency $\omega_1=\mathrm{Re}\,\omega$ were specified. In the calculations, the following values were taken for the physical, mechanical and geometrical parameters characterizing the panel, the environment, the inhomogeneity of the panel:

$$I_{kpi}=0{,}23mm^4,\ I_{xi}=5{,}1mm^4,\ k_v=10^6N/m^3,\ k_p=10^4N/m,\ \frac{l}{R}=3,\ R=1{,}6sm$$

$$\rho_0=\rho_i=1850kg/m^3,\ \tilde{E}_i=6{,}67\cdot10^9N/m^2,\ I_{zi}=1{,}3mm^4,\ \nu=0{,}35;\ m=1,\ n=8$$

$$h_i=1{,}39sm,\qquad F_i=5.2mm^2,\ A=0{,}034,\ \psi=0{,}05 \qquad (19)$$

It is assumed that the modulus of elasticity of the cylindrical panel varies linearly with respect to the variable z:

$$E_1(z)=E_{10}(1+\beta z),\ E_2(z)=E_{20}(1+\beta z),\ G(z)=G_0(1+\beta z)$$

Here, β - is the inhomogeneity parameter and $\beta\in[-1;1]$.

Table 1

k_1	5	10	15	20
ω_1	55	59	62	67

Table 2

β	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
ω_1	53	56	59	61	64

The found values of the number of shafts and the ω_1 frequency for varied values of the heterogeneity parameter β are given in table 1 and table 2. In the calculation, $\frac{E_{10}}{E_{20}}=1{,}25$ for both tables, $\beta=0{,}4$ for table 1, $k_1=10$ for table 2 were taken. As can be seen from the tables, as the number of shafts and the values of the inhomogeneity parameter increase, the specific oscillation frequencies of the system increase.

REFERENCES

1. Movsumova A.H. Free vibrations of inhomogeneous, orthotropic, medium-contacting cylindrical panel stiffened with annular ribs// International Journal on "Technical and Physical Problems of Egnineering", SCOPUS, Impact Factor=4.54, Iss.42, Vol.12, No.1, March, 2020, Norveç, pp.40-43.
2. Movsumova A.H. Vibrations reinforced by longitudinal ribs of an inhomogeneous orthotropic cylindrical panel contacting with a viscous-elastic medium// Вісник *Дніпропетровського університету*, Серія «Механіка», 2020, *Днепропетро́вск*, pp.144-155.
3. Sofiyev A.H., Hui D., Haciyev V.C., Erdem H., Sehirak B, Culdal V. The nonlinear vibration of orthotropic functionally graded cylindrical shell surrounded an elastic foundation wrist order shear deformation theory// Composites Part B. 116, 2017.
4. Sofiyev A.H. Large amplitude vibration of FGM orthotropic shells interructing the nonlinear Wikler elastic foundation/ Composites part B. Engineering 98, 1, Aug. 2016, pp.141-159.
5. Amiro I.Y., Zarutsky V.A., Polyakov P.S. Ribbed cylindrical shells. Kiev: Naukova Dumka, 1973, pp.248. (In Russian)
6. Lomakin V.A. Theory of elasticity of inhomogeneous bodies. Moscow: Moscow State Univ. Publ. house, 1976, pp.368. (in Russian)

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2022. Volume 6, Number 2 *Pages 92-96*

UOT: 517.947

HİLBERT FƏZASINDA İKİNCİ TƏRTİB OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN SONLU PARCADA BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİNİN TƏDQİQİ

R.F. HƏTƏMOVA
Sumqayıt Dövlət Universiteti
hetemova_roya@mail.ru

XÜLASƏ

Təqdim edilmiş məqalədə sonlu parcada ikinci tərtib operator-diferensial tənlik üçün bir sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri tədqiq edilmişdir. Bu məqsədlə əvvəlcə tənliyin potensial funksiyası sıfır olduğu halda məxsusi ədədləri öyrənilir və bu məxsusi ədədlərə uyğun otronormal məxsusi vektor-funksiyalar təyin olunur. $Q(x)$ operator-funksiya müəyyən şərtləri ödədiyi halda baxılan məsələnin spektrinin quruluşu haqqında əsas teorem isbat olunur.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, operator-diferensial tənlik, sərhəd şərtləri, rezolvent, məxsusi ədədlər, məxsusi vektor-funksiyalar, spektr.

ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

РЕЗЮМЕ

В представленной статье исследуется собственные значения одной краевой задачи для операторно-дифференциального уравнения второго порядка. Для этой цели сперва изучается собственные значения задачи с нулевыми потенциальными функциями и определяется соответствующие ортонормированные собственные вектор-функции. Далее доказывается основная теорема о структуре спектра данной задачи.

Ключевые слова: Гильбертово пространство, оператор, операторно-дифференциальные уравнение, краевые условия, резольвента, собственные значения, собственные вектор-функции, спектр.

INVESTIGATION THE EİGENVALUES OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SECOND-ORDER OPERATOR-DİFFERENTİAL EQUATİON ON A FİNİTE İNTERVAL İN A HİLBERT SPACE

ABSTRACT

In the paper we study eigenvalues of a boundary value problem for a second-order operator-differential equation. To this end, at first we study eigenvalues of the problem with zero potential functions and determine approriate orthonormed eigen vector-functions. Then we prove the main theorem on the structure of the spectrum of this problem.

Keywords: Hilbert space, operator, operator-differential equation, boundary conditions, resolvent, eigenvalues, eigenvector functions, spectrum.

Fərz edək ki, H -separabel Hilbert fəzasıdır.

$H_1 = L_2[[0,1]:H]$ Hilbert fəzasında

$$l(y) = -y'' + Q(x)y, \quad 0 \le x \le 1 \quad (1)$$

diferensial ifadəsi və

$$y(0) = 0, \; y'(1) + ay(1) = 0, \; a > 0 \quad (2)$$

sərhəd şərtləri ilə təyin olunmuş L operatoruna baxaq. Burada $Q(x)$ operator-funksiyası istənilən $x \in [0,1]$ üçün H fəzasında öz-özünə qoşma olan operatordur. Əlavə olaraq $Q(x)$ operator-funksiyasının aşağıda göstərilən şərtləri ödəməsi də fərz olunur:

1) $Q(x)$ oprerator-funksiyası istənilən $x \in (a,b)$ üçün öz-özünə qoşma nüvə tipli operatordur;

2) $\|Q(x)\|_{H_1} < \frac{1}{2}(\mu_{m+1} - \mu_m)$, burada $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_m <$ ədədləri $\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} + a\sin\sqrt{\lambda} = 0$ tənliyinin müsbət köklərıdir.

3) H fəzasında elə ortonormal $\{\varphi\}_{n=1}^{\infty}$ basizi vardır ki, $\sum_{n=1}^{\infty}\|Q(x)\varphi_n\|_{H_1} < \infty$.

L_0 ilə $l_0(y) = -y''(x)$ diferensial ifadəsi və (2) sərhəd şərtləri ilə təyin olunmuş operatoru işarə edək. L_0 operatorunun spektri $\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} + a\sin\sqrt{\lambda} = 0$ tənliyinin müsbət köklərindən ibarət olan $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}, 0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_m < \ldots$ çoxluqdur. Tənliyin hər bir kökü sonsuz tərtibli məxsusi ədəddir. μ_m məxsusi ədədinə uyğun ortonormal məxsusi vektor-funksiyalar

$$\psi_{mn}^0(x) = \alpha_m \sin\sqrt{\mu_m}x \cdot \varphi_n,\ n = 0,1,2,\ldots \quad (3)$$

şəklindədir. Burada

$$\alpha_m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + a^{-1}\cos^2\sqrt{\mu}}}\ . \quad (4)$$

R_λ^0 və R_λ ilə uyğun olaraq L_0 və L operatorlarının rezolventasını işarə edək. Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1. Əgər $Q(x)$ operator funksiyası, 1)-3) şərtlərini ödəyirsə və $\lambda \in \rho(L_0)$ isə, onda

$$Q(x)R_\lambda^0 : H_1 \to H_1$$

operatoru nüvə tipli operatordur, yəni $Q(x)R_\lambda^0 : \sigma_1(H_1)$.

İsbatı. Teoremi isbat etmək üçün

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|Q(x)R_\lambda^0\psi_{mn}^0(x)\right\|_{H_1}$$

sırasının yığılan olduğunu göstərmək kifayətdir ([2], səh.125).

(3),(4) bərabərliklərini nəzərə alsaq, onda aşağıdakı münasibətləri alarıq:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|Q(x)R_{\lambda}^{0}\psi_{mn}^{0}(x)\right\|_{H_1}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\mu_m-\lambda\right|^{-1}\left\|Q\psi_{mn}^{0}(x)\right\|_{H_1}=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\mu_m-\lambda\right|^{-1}\left[\int_0^1\left(\alpha_m s_m\sqrt{\mu_m}x\right)^2\left\|Q(x)\varphi_n\right\|_{H_1}dx\right]^{1/2}\leq$$

$$\leq\sqrt{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\mu_m-\lambda\right|^{-1}\left\|Q(x)\varphi_n\right\|_{H_1} \quad (5)$$

Məlumdur ki, $m\to\infty$ şərtində aşağıdakı asimptotik düstur doğrudur [8]:

$$\sqrt{\mu_m}=\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{a}{\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi}+O\left(\frac{1}{m^2}\right). \quad (6)$$

Bu bərabərlikdən və (5) bərabərsizliyindən alırıq:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|Q(x)R_{\lambda}^{0}\psi_{mn}^{0}(x)\right\|_{H_1}=c_{\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}m^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|Q(x)\varphi_n\right\|_{H_1}$$

Burda c_{λ} yalnız λ parametrindən asılı olan hər hansı müsbət ədəddir.

3) şərtindən və sonuncu bərabərsizlikdən

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|Q(x)R_{\lambda}^{0}\psi_{mn}^{0}(x)\right\|_{H_1}<\infty$$

olduğunu alırıq.

Teorem 1 isbat olundu.

İndi isə L operatorunun spektrinin quruluşu haqqında teoremi göstərək:

Teorem 2. Əgər $Q(x)$ operator-funksiyası 1)-3) şərtlərini ödəyirsə, onda L opertaorunun spektri

$$\Omega_m=\left[\mu_m-\left\|Q(x)\right\|_{H_1},\mu_m+\left\|Q(x)\right\|_{H_1}\right],\ m=1,2,\ldots$$

parçalarının birləşməsindən ibarət çoxluğun alt çoxluğudur. Belə ki, Ω_m parçalar cüt-cüt kəsişmirlər və aşağıdakılar doğrudur:

a) L operatorunun Ω_m parşasına daxil olan və μ_m-dən fərqli olan hər bir spektr nöqtəsi sonlu tərtibə malik olan izolə edilmiş, məxsusi ədəddir;

b) μ_m nöqtələri L operatorunun sonli və ya sonsuz tərtibə malik olan məxsusi ədədi ola bilər;

c) Aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_{mn}=\mu_m,$$

burada $\{\lambda_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ L operatorunun Ω_m parşasına daxil olan məxsusi ədədləridir.

İsbatı. L_0 və L operatorlarının rezolventası olan R_λ^0 və R_λ operatorları üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$R_\lambda^0 - R_\lambda Q R_\lambda^0 = R_\lambda \quad (7)$$

Əgər $\lambda \in R^1 \mid \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m$ olarsa, bu halda

2) şərtindən

$$|\lambda - \mu_m| > \|Q\|_{H_1}, m = 1,2,... \quad (8)$$

olduğunu alarıq. $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ öz-özünə qoşma operatoru üçün

$$\left\|R_\lambda^0\right\|_{H_1} = \min_m |\lambda - \mu_m|^{-1}$$

olduğunda (8) bərabərsizlıiyinə görə

$$\left\|R_\lambda^0\right\|_{H_1} \le \|Q\|_{H_1}^{-1}$$

alarıq. Onda, nəticədə

$$\left\|QR_\lambda^0\right\|_{H_1} \le \|Q\|_{H_1} \left\|R_\lambda^0\right\|_{H_1} < 1$$

olduğunu alarıq. Bu onu göstərir ki, $A(B) = R_\lambda^0 - BQR_\lambda^0$ operatoru H_1 fəzasında təsir edən $L(H_1)$ xətti kəsilməz operatorlar fəzasında sıxan operatordur. Sıxan operatorların tərpənməz nöqtəsi haqqında teoremə görə $A(R_\lambda) = R_\lambda$ tənliyinin yeğanə həlli vardır. Buradan alırıq ki, hər bir $\lambda \notin \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m$ nöqtəsi L operatorunun requlyar nöqtəsidir. Ona görə də öz-özünə qoşma *L* operatorunun spektri cüt-cüt kəsişməyən Ω_m parçalarının birləşməsindən ibarət çoxluğa daxildir, yəni

$$\sigma(L) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m.$$

Teorem 1 və (7) bərabərsizliyindən alınır ki, əgər λ ədədi L_0 və L operatorların requlyar nöqtəsi isə, onda $R_\lambda - R_0$ operatoru H_1 fəzasında nüvə tipli ooperatordur yəni $(R_\lambda - R_\lambda^0) \in \sigma_1(H_1)$. Bu halda məlumdur ki, L_0 və L operatorlarının spekrtinin kəsilməz hissəsi üst-üstə düşər ([7], səh.307). L_0 operatorunun spektri kəsilməz olduğundan L operatorunun da spektrinin kəsilməz hissəsinin $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ çoxluğu olduğunu almış olarıq.

Buradan eyni zamanda teorem 2-nin a) b) c) hökmlərinin doğru olduğunu aıarıq. Teorem 2 isbat olundu.

Məqalədə həll olunan məsələnin qoyuluşuna və məsələnin həlli zamanı göstərdiyi diqqətə görə elmi rəhbərin professor Həmdulla İ.Aslanova öz dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

ƏDƏBİYYAT

1. Адыгезалов А.А. О следе разности двух дифференциальных операторов Штрума-Лиувилля с операторными коэффициентами. Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем.наук, 1976, № 5, с.20-24.
2. Байрамоглы М. Высшее следы для абстрактного уравнения Штурма-Лиувилля, Баку, 1986 34 с. (препринт АН Азерб. ССР, Институт физики, № 6)
3. Гасымов М.Г. О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов. Доклады АН ССР 1963, т. 150, № 6, с. 1202-1205.
4. Горбачук В.И., Гобаучук М.Л. Граничные задачи для дифференциально операторных уравнений. Киев, Наукова Думка, 1984, 284 с.
5. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М. «Наука», 1965, 448 с.
6. Дикий Л.А. Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля, УМН, 1958, XIII, вып.3 (81), с.111-143.
7. Като Т. Теория возмушений линейных операторов, М. Мир., 1972, 740 с.
8. Левитан Б. М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М., Наука, 1988, 431 с.

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2022. Volume 6, Number 2 *Pages 97-107*

UOT 519.3

İKİ ÖLÇÜLÜ VOLTERRA TİP İNTEQRAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİ İLƏ TƏSVİR OLUNAN OPTIMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN BİRİNCİ VƏ İKİNCİ TƏRTİB ZƏRURİ ŞƏRTLƏR VƏ KLASSİK MƏNADA MƏXSUSİ İDARƏLƏRİN OPTİMALLIĞI HAQQINDA

VƏFA RZAYEVA

Sumqayıt Dövlət Universiteti,

Sumqayıt, Azərbaycan

vefa.asgerova77@mail.ru

XÜLASƏ

Məqalədə iki ölçülü Volterra tip inteqral tənliklər sistemi ilə təsvir olunan bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. İdarə oblastının açıq olması şərti daxilində Eyler tənliyinin və Lejandr-Klebş şərtinin analoqları alınmışdır.

Optimallıq üçün ikinci tərtib ümumi zəruri şərt isbat edilmiş və klassik mənada məxsusi idarələrin optimallıq şərti alınmışdır.

Açar sözlər: interqal tənlik, mümkün idarə, optimallıq şərti, funksionalın variasiyası, Eyler tənliyi**,** Lejandr-Klebş şərti, klassik mənada məxsusi idarə.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ И ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ, В КЛАССИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ, УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМОЙ СИСТЕМОЙ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается одна задача оптимального управления, описываемая системой двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра. При предположении открытости области управления доказаны аналоги уравнения Эйлера и условия Лежандра-Клебша.

Получено общее необходимое условие оптимальности второго порядка и необходимое условие оптимальности особых, в классическом смысле, управлений.

Ключевые слова: интегральное уравнение, допустимое управление, условие оптимальности, вариация функционала, уравнение Эйлера, условие Лежандра-Клебша, особое, в классическом смысле, управление.

A NECESSARY OPTIMALITY CONDITION OF THE PONTRYAGIN'S MAXIMUM PRINCIPLE TYPE IN AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH A MULTIPOINT PERFORMANCE CRITERION

ABSTRACT

The article considers the optimal control problem described by a system of two-dimensional integral equations of the Volterra type. Assuming the openness of the control domain, the analogues of the Euler equation and the Legendre-Clebsch condition are proved.

A general necessary condition for second order optimality and a necessary condition for optimality of singular controls are obtained.

Keywords: integral equation by Volterra type, admissible control, optimality condition, functional variation, Euler equation, Legendre-Clebsch condition, singular in the classical sense of control.

Giriş. Bir çox işlərdə inteqral tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələləri tədqiq edilmiş və müəyyən optimallıq şərtləri alınmışdır (bax məsələn, [1-4]).

Təqdim olunan məqalədə ilk dəfə iki ölçülü Volterra tip inteqral tənliklər sistemi ilə və çoxnöqtəli ketfiyyət meyarı ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələSinə baxılmışdır.

Artım üsulunun bir variantını tətbiq edərək idarə oblastının açıq olaması şərti daxilində optimallıq şərtləri alınmışdır.

1. Məsələnin qoyuluşu. Bu işdə

$$J(u) = \varphi\big(z(T_1, X_1), z(T_2, X_2), \dots, z(T_k, X_k)\big) + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} F\big(t, x, z(t,x), u(t,x)\big)dxdt \quad (1)$$

funksionalının

$$u(t,x) \in U \subset R^r, (t,x) \in D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1], (2)$$

$$z(t,x) = \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} f\big(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s)\big)ds d\tau\,, (t,x) \in D \ (3)$$

məhdudiyyətləri daxilində minimumunun tapılması məsələsi tədqiq olunur.

Burada $f(t,x,\tau,s,z,u)$ və $F(t,x,z,u)$ uyğun olaraq, verilmiş n-ölçülü və skalyar funksiyalar olub, arqumentlərinin küllüsünə nəzərən (z,u)-ya görə ikinci tərtib xüsusi törəmələri ilə birlikdə kəsilməzdirlər, $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_k) -$ verilmiş, iki dəfə kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiya, $U -$ verilmiş, boş olmayan, açıq və məhdud çoxluq, $D -$ verilmiş düzbucaqlı, $u(t,x) - r$-ölçülü ölçülən və məhdud idarəedici vektor-funksiyadır.

Yuxarıda verilmiş (2) məhdudiyyətini ödəyən hər bir idarəedici vektor-funksiyaya mümkün idarə deyəcəyik.

Fərz olunur ki, hər bir $u(t,x)$ mümkün idarəsinə (3) inteqral tənliklər sisteminin yeganə kəsilməz $z(t,x)$ həlli cavab verir.

Bu (1) funksionalına (2), (3) məhdudiyyətləri daxilində minimum verən $u(t,x)$ mümkün idarəsinə optimal idarə, $\big(u(t,x), z(t,x)\big)$ prosesinə isə optimal proses deyəcəyik.

Məqsədimiz bu məhdudiyyətlər daxilində optimallıq üçün yeni zəruri şərtlər tapmaqdır.

2.Funksionalın birinci və ikinci variasiyalarının (klassik mənada) hesablanması. Tutaq ki, (t,x) və $\bar{u}(t,x) = u(t,x) + \Delta u(t,x)$ iki mümkün idarədirlər. Bu (2) Volterra tənliklər sisteminin bu iki mümkün idarəyə cavab verən həllərini uyğun olaraq $z(t,x)$ və $\bar{z}(t,x) = z(t,x) + \Delta z(t,x)$ ilə işarə edərək

$$H\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big) = -F\big(t,x,z(t,x),u(t,x)\big) -$$
$$-\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t,x)\frac{\partial \varphi'\big(z(T_1,X_1), z(T_2,X_2), \dots, z(T_k,X_k)\big)}{\partial a_i} \times$$
$$\times f\big(T_i, X_i, t, x, z(t,x), u(t,x)\big) +$$
$$+\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1} \psi'(\tau,s) f\big(\tau, s, t, x, z(t,x), u(t,x)\big)ds d\tau$$

şəklində Hamilton-Pontryagin funskiyasının analoqunu daxil edək.

Burada $\alpha_i(t,x) - [t_0,T_i]\times[x_0,X_i]$ düzbucaqlısının xarakteristik funksiyası, $\psi(t,x)$ isə hələlik ixtiyari olan n-ölçülü vektor-funksiyadır.

Bu halda (1) funksionalının artımını

$$\Delta J(u) = -\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\big[H\big(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x),\psi(t,x)\big) -$$

$$-H\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)\big]dxdt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\Delta z(t,x)dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta z'(T_i,X_i)\frac{\partial^2\varphi\big(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\big)}{\partial a_i\partial a_j}\Delta z(T_i,X_i) + o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|^2\right) \quad (4)$$

şəkildə göstərə bilərik.

Burada $o_3\big(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|^2\big)$ kəmiyyəti

$$\varphi\big(\bar{z}(T_1,X_1),\bar{z}(T_2,X_2),\dots,\bar{z}(T_k,X_k)\big) - \varphi\big(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\big) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial\varphi'\big(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\big)}{\partial a_i}\Delta z(T_i,X_i) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta z'(T_i,X_i)\frac{\partial^2\varphi\big(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\big)}{\partial a_i\partial a_j}\Delta z(T_i,X_i) + o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|^2\right)$$

ayrılışından təyin olunur.

$H(t,x,z,u,\psi)$ funksiyasının (x,u)-ya görə ikinci tərtib kəsilməz törəməyə malik olduğunu nəzərə alsaq, funksionalın (4) artım düsturunu

$$\Delta J(u) = -\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial z}\Delta z(t,x)dxdt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u}\Delta u(t,x)dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\Delta z'(t,x)\frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial z^2}\Delta z(t,x) +\right.$$

$$+2\Delta u'(t,x)\frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u\partial z}\Delta z(t,x) +$$

$$\left.+\Delta u'(t,x)\frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u^2}\Delta u(t,x)\right]dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta z'(T_i,X_i)\frac{\partial^2\varphi\big(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\big)}{\partial a_i\partial a_j}\Delta z(T_i,X_i) +$$

$$+o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|^2\right)-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_2\left([\|\Delta z(t,x)\|+\|\Delta u(t,x)\|]\right)dxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\Delta z(t,x)dxdt\,.\,(5)$$

Fərz edək ki, $\psi(t,x)$ vektor-funksiyası

$$\psi(t,x)=-H_z\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)$$

qoşma sisteminin həllidir.

Onda funskionalın (5) artım düsturundan alarıq ki,

$$\Delta J(u)=-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u}\Delta u(t,x)dxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta z'(T_i,X_i)\frac{\partial^2\varphi\big(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\big)}{\partial a_i\partial a_j}\Delta z(T_i,X_i)+$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Bigg[\Delta z'(t,x)\frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial z^2}\Delta z(t,x)+$$

$$+2\Delta u'(t,x)\frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u\partial z}\Delta z(t,x)+$$

$$+\Delta u'(t,x)\frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u^2}\Delta u(t,x)\Bigg]dxdt+$$

$$+o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|^2\right)-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_2\left([\|\Delta z(t,x)\|+\|\Delta u(t,x)\|]\right)dxdt.\,(6)$$

Məlumdur ki,

$$\Delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\big[f\big(t,x,\tau,s,\bar{z}(\tau,s),\bar{u}(\tau,s)\big)-f\big(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)\big]dsd\tau.\,(7)$$

Buradan alarıq ki,

$$\|\Delta z(t,x)\|\le L_1\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}[\|\Delta z(\tau,s)\|+\|\Delta u(\tau,s)\|]\,dsd\tau$$

($L_1=const>0$ müəyyən bir sabitdir).

Bu bərabərlikdən Vendroff lemmasını tətbiq edərək alarıq ki,

$$\|\Delta z(t,x)\|\le L_2\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\|\Delta u(t,x)\|\,dsd\tau.\,(8)$$

Burada $L_2=const>0$ müəyyən bir sabitdir.

Tutaq ki, $\varepsilon>0$ mütləq qiymət ilə kafi qədər kiçik ixtiyari ədəd, $v(t,x)\in U,(t,x)\in D$ isə ixtiyari mümkün idarədir.

Şərtə görə U çoxluğu açıq çoxluqdur. Ona görə də $u(t,x)$ mümkün idarəsinin xüsusi

artımını

$$\Delta u_\varepsilon(t,x) = \varepsilon\delta u(t,x) \quad (9)$$

düsturu ilə təyin etmək olar.

Burada ε mütləq qiymət ilə kafi qədər kiçik olan ixtiyari ədəd, $\delta u(t,x) \in R^r, (t,x) \in D$ isə ixtiyari ölçülən və məhdud vektor-funksiyadır.

Qeyd edək ki, (9) düsturu ilə təyin olunmuş $\Delta u_\varepsilon(t,x)$ xüsusi artımı variasiya hesabından məlum olan klassik variasiyadır.

İndi $\Delta z_\varepsilon(t,x)$ ilə $z(t,x)$ vəziyyətinin idarənin (9) düsturu ilə təyin olunmuş xüsusi artımına cavab verən artımını işarə edək.

Yuxarıda verilmiş (7) düsturundan aydındır ki,

$$\Delta z_\varepsilon(t,x) = \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\big[f_z\big(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)\Delta z_\varepsilon(\tau,s) + \\ -f_u\big(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)\big]\Delta u_\varepsilon(\tau,s)dsd\tau.$$

Buradan alarıq ki,

$$\Delta z_\varepsilon(t,x) = \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\big[f\big(t,x,\tau,s,z(\tau,s)+\Delta z_\varepsilon(\tau,s),u(\tau,s)+\Delta u_\varepsilon(\tau,s)\big) - \\ -f\big(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)\big]dsd\tau + \\ + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} o_5([\|\Delta z(\tau,s)\| + \|\Delta u(\tau,s)\|])\,dsd\tau. \quad (10)$$

Daha sonra (8) düsturundan aydındır ki, $\|\Delta z_\varepsilon(t,x)\|$ $|\varepsilon|$ tərtibdən sonsuz kiçik kəmiyyətdir.

İndi $\Delta z_\varepsilon(t,x)$ xüsusi artımını

$$\Delta z_\varepsilon(t,x) = \varepsilon\delta z(t,x) + o_6(\varepsilon;t,x) \quad (11)$$

şəklində axtaraq.

Burada $\delta z(t,x)$ hələlik naməlum olan vektor-funksiyadır.

Bu (11) ayrılışını və (9) düsturunu (10) düsturunda yazaraq və nəzərə alaraq ki, $\|\Delta z_\varepsilon(t,x)\|$ $|\varepsilon|$ tərtibdən sonsuz kiçik kəmiyyətdir, görərik ki,

$$\varepsilon\delta z(t,x) + o_6(\varepsilon;t,x) = \varepsilon\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} f_z\big(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)\delta z(\tau,s)dsd\tau + \\ +\varepsilon\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} f_u\big(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)\delta u(\tau,s)dsd\tau + o_7(\varepsilon;t,x), \quad (12)$$

bu bərabərliyin hər iki tərəfini ε-a bölərək və $\varepsilon \to 0$ şərtilə limitə keçərək alarıq ki,

$$\delta z(t,x) = \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} f_z\big(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)\delta z(\tau,s)dsd\tau + \\ + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} f_u\big(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)\delta u(\tau,s)dsd\tau\,. \quad (13)$$

Deməli, göstərdik ki, əgər $\delta z(t,x)$ (13) xətti və bircins olmayan Volterra inteqral tənliyinin həlli olarsa, onda (11) ayrılışı doğrudur.

Bu (13) tənliyinə baxılan məsələ üçün [5] işinə analoji olaraq variasiyalı tənlik deyəcəyik.

İndi (9) və (11) düsturlarını funksionalın (6) artım düsturunda nəzərə alıb bəzi çevrilmələrdən sonra alarıq ki,

$$J(u+\Delta u_\varepsilon)-J(u)=-\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u}\delta u(t,x)dxdt+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\delta z'(T_i,X_i)\frac{\partial^2\varphi\big(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\big)}{\partial a_i\partial a_j}\delta z(T_i,X_i)+$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Bigg[\delta z'(t,x)\frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial z^2}\delta z(t,x)+$$

$$+2\delta u'(t,x)\frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u\partial z}\delta z(t,x)+$$

$$+\delta u'(t,x)\frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u^2}\delta u(t,x)\Bigg]dxdt.$$

Bu ayrılışdan alınır ki, funksionalın klassik mənada birinci və ikinci variasiyaları

$$\delta^1 J(u;\delta u)=-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u}\delta u(t,x)dxdt, \quad (14)$$

$$\delta^2 J(u^o;\delta u)=\sum_{i,j=1}^{k}\delta z'(T_i,X_i)\frac{\partial^2\varphi\big(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\big)}{\partial a_i\partial a_j}\delta z\big(T_j,X_j\big)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Bigg[\delta z'(t,x)\frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial z^2}\delta z(t,x)+$$

$$+2\delta u'(t,x)\frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u\partial z}\delta z(t,x)+$$

$$+\delta u'(t,x)\frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u^2}\delta u(t,x)\Bigg]dxdt \quad (15)$$

şəklindədirlər.

Bu (14) və (15) düsturlarından aşağıdakı hökmün doğruluğu alınır.

Teorem 1. (Qeyri-aşkar şəkildə verilmiş optimallıq şərti). Baxılan optimal idarəetmə məsələsində $u(t,x)$ mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri şərt ixtiyari $\delta u(t,x)\in R^r,(t,x)\in D$ üçün

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial H'\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u}\delta u(t,x)dxdt=0, \quad (16)$$

$$\sum_{i,j=1}^{k}\delta z'(T_i,X_i)\frac{\partial^2\varphi\big(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\big)}{\partial a_i\partial a_j}\delta z(T_i,X_i)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\delta z'(t,x)\frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial z^2}\delta z(t,x)+$$

$$+2\delta u'(t,x)\frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u\partial z}\delta z(t,x)+$$

$$+\delta u'(t,x)\frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u^2}\delta u(t,x)\Big]dxdt\geq 0 \quad (17)$$

münasibətlərinin ödənmələridir.

Qeyd edək ki, (16) və (17) münasibətləri qeyri-aşkar verilmiş optimallıq şərtləridir. Ona görə də bu zəruri şərtlərin istifadə olunması kifayət qədər çətin məsələdir.

Bütün bunlar aşkar şəkildə verilmiş optimallıq şərtlərinin alınmasını zəruri edir.

3. Optimallıq üçün aşkar şəkildə verilmiş zəruri şərtlər. Bu (16) eyniliyində $u(t,x)$ mümkün idarəsinin $\delta u(t,x)$ mümkün variasiyasının ixtiyariliyindən istifadə edərək aşağıdakı hökm isbat olunur.

Teorem 2. Baxılan optimal idarəetmə məsələsində $u(t,x)$ mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\frac{\partial H\big(\theta,\xi,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi),\psi(\theta,\xi)\big)}{\partial u}=0 \quad (18)$$

bərabərliyinin ixtiyari $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ üçün ödənməsidir.

İsbat olunmuş (18) zəruri şərtini klassik variasiya hesabının terminalogiyasına əsasən baxılan optimal idarəetmə məsələsində Eyler tənliyinin analoqu adlandıracağıq.

Eyler tənliyinin analoqunu ödəyən hər bir $u(t,x)$ mümkün idarəsinə isə klassik ekstremal deyəcəyik.

Bu tərifdən aydındır ki, hər bir optimal idarə həm də klassik idarədir, lakin klassik idarə optimal idarə olmaya da bilər.

Klassik variasiya hesabından məlumdur ki, (bax məsələn, [5]) bunu nəzərə alaraq ekstremum üçün ikinci tərtib zəruri şərtlər tapılması zəruridir.

Bu mənada (17) bərabərsizliyi optimallıq üçün ikinci tərtib zəruri şərtdir. Lakin qeyd etdiyimiz kimi onu optimal idarə məsələsini tədqiq etmək üçün bilavasitə tədqiq etmək kifayət qədər çətin məsələdir. Ona görə də optimallıq üçün ikinci tərtib zəruri şərtlər alınması çox vacibdir. Bu məsələ ilə məşğul olaq.

Göründüyü kimi (13) tənliklər sistemi (variasiya tənliyinin analoqu) xətti, bircins olmayan inteqral tənliklər sistemidir.

Onun həllini

$$\delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}f_u\big(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)\delta u(\tau,s)dsd\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\Big[\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R(t,x,\alpha,\beta)f_u\big(\alpha,\beta,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)d\alpha d\beta\Big]\delta u(\tau,s)dsd\tau \quad (19)$$

şəklində axtaraq.

Burada $R(t,x,\tau,s)(n\times n)$ matris funksiyası aşağıdakı sistemin həllidir:

$$R_{\tau s}(t,x,\tau,s)=\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}R(t,x,\alpha,\beta)f_z\big(\alpha,\beta,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)d\alpha d\beta+$$
$$+f_z\big(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big).\ (20)$$

Əgər

$$Q(t,x,\tau,s)=\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}R(t,x,\alpha,\beta)f_u\big(\alpha,\beta,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)d\alpha d\beta+$$
$$+f_z\big(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)$$

işarəsini daxil etsək (19) düsturunu

$$\delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}Q(t,x,\tau,s)\delta u(\tau,s)ds d\tau\ \ (21)$$

kimi yaza bilərik.

İndi həllin bu (21) göstəriliş düsturundan istifadə edərək (17) bərabərsizliyinin bəzi hədləri üzərində çevrilmələr aparaq.

Bu (21) düsturundan aydındır ki,

$$\delta z(T_i,X_i)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\alpha_i(t,x)Q(T_i,X_i,t,x)\delta u(t,x)dxdt\,.(22)$$

Bu (22) düsturu vasitəsilə alırıq ki,

$$\sum_{i,j=1}^{k}\delta z'(T_i,X_i)\frac{\partial\varphi^2\big(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\big)}{\partial a_i\partial a_j}\delta z\big(T_j,X_j\big)=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta u'(\tau,s)Q'(T_i,X_i,\tau,s)\alpha_i(t,x)\times\ (23)$$
$$\times\frac{\partial\varphi^2\big(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\big)}{\partial a_i\partial a_j}Q(T_i,X_i,\alpha,\beta)\times\delta u(\alpha,\beta)\alpha_j(\alpha,\beta)ds d\tau d\alpha d\beta.$$

Daha sonra (21) düsturu vasitəsilə alırıq ki,

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta u'(t,x)\frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u\partial z}\delta z(t,x)dxdt=\ (24)$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\delta u'(t,x)\frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u\partial z}Q(t,x,\tau,s)\times\delta u(\tau,s)ds d\tau\Big]dxdt.$$

Nəhayət, [1] işinə analoji olaraq isbat olunur ki,

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta z'(t,x)\frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial z^2}\delta z(t,x)dxdt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta u'(\tau,s)\times$$

$$\times \left[\int_{\max(\tau,\alpha)}^{t_1} \int_{\max(s,\beta)}^{x} Q'(t,x,\tau,s) \frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial z^2} \times \right.$$

$$\left. \times Q(t,x,\alpha,\beta)\delta u(\tau,s)dxdt \right] ds d\tau d\alpha d\beta. \quad (25)$$

İndi

$$K(\tau,s,\alpha,\beta) = -\sum_{i,j=1}^{k} Q'(T_i,X_i,\tau,s) \frac{\partial \varphi^2\big(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k)\big)}{\partial a_i \partial a_j} \times$$

$$\times Q\big(T_j,X_j,\tau,s\big)\alpha_i(\tau,s)\alpha_j(\alpha,\beta) +$$

$$+ \int_{\max(\tau,\alpha)}^{t_1} \int_{\max(s,\beta)}^{x_1} Q'(t,x,\tau,s) \frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial z^2} \times Q(t,x,\alpha,\beta)dxdt$$

şəklində matris funksiyanı daxil edək.

Onda (23)-(25) eyniliklərini nəzərə almaqla (17) bərabərsizliyini

$$\int_D \int_D \delta u'(\tau,s)K(\tau,s,\alpha,\beta)\delta u(\alpha,\beta)ds d\tau\, dxdt +$$

$$+ \int_D \left[\int_{t_0}^{t} \int_{x_0}^{x} \delta u'(t,x) \frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u \partial z} Q(t,x,\tau,s) \times \right.$$

$$\left. \times Q(t,x,\tau,s)\delta u(\tau,s)ds d\tau \right] dxdt +$$

$$+ \int_D \delta u'(t,x) \frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u^2} \delta u(t,x)dxdt \le 0 \quad (26)$$

kimi yaza bilərik.

Beləliklə, aşağıdakı hökmün isbatı başa çatmışdır.

Teorem 3. Baxılan məsələdə $u(t,x)$ mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri şərt (26) bərabərsizliyinin ixtiyari $\delta u(t,x) \in R^r, (t,x) \in D$ üçün ödənməsidir.

Optimallıq üçün isbat olunmuş bu zəruri şərt kifayət qədər ümumi olmaqla bərabər konstruktiv xarakter daşıyır. Özü də bu zəruri şərtdən daha asan yoxlanıla bilən zəruri şərt, xüsusi halda isə Lejandr-Klebş şərtinin (bax məsələn, [5]) analoqunu almaq olar.

Tutaq ki, $v \in R^r$ ixtiyari vektor, $(\theta,\xi) \in [t_0,t_1) \times [x_0,x_1)$ $u(t,x)$ mümkün idarəsinin ixtiyari Lebeq nöqtəsi, $\mu > 0$ isə kafi qədər kiçik ixtiyari ədəd olub, $\theta + \mu < t_1, \xi + \mu < x_1$ bərabərsizliklərini ödəyir.

Fərziyyəyə görə $\delta u(t,x)$ ixtiyari mümkün variasiya olduğundan, onu

$$\delta u\,(t,x;\varepsilon) = \begin{cases} v, (t,x) \in D_\mu = [\theta,\theta+\mu) \times [\xi,\xi+\mu), \\ 0, (t,x) \in D \backslash D_\mu \end{cases} \quad (27)$$

düsturu ilə təyin etmək olar.

Mümkün variasiyanın bu (27) düsturu ilə təyin olunmuş ifadəsini (26) bərabərsizliyində nəzərə alaraq, bəzi çevrilmələr aparsaq, görərik ki,

$$\varepsilon^2 v' \frac{\partial^2 H\big(\theta,\xi,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi),\psi(\theta,\xi)\big)}{\partial u^2} v + o(\varepsilon^2) \le 0.$$

Buradan isə

$$v' \frac{\partial^2 H\big(\theta,\xi,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi),\psi(\theta,\xi)\big)}{\partial u^2} v \le 0$$

bərabərsizliyi alınır.

Teorem 4. Baxılan məsələdə $u(t,x)$ mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$v' \frac{\partial^2 H\big(\theta,\xi,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi),\psi(\theta,\xi)\big)}{\partial u^2} v \le 0 \quad (28)$$

bərabərsizliyinin ixtiyari $v \in R^r$ və $(\theta,\xi) \in [t_0,t_1) \times [x_0,x_1)$ üçün ödənməsidir.

Qeyd edək ki, bu (28) zəruri şərti Lejandr-Klebş şərtinin analoqudur.

4. Klassik mənada məxsusi idarələrin tədqiqi. Göründüyü kimi (28) bərabərsizliyi optimallıq üçün ikinci tərtib zəruri şərtdir. Lakinbu zəruri şərt bəzən cırlaşa bilərək öz məzmunlu mahiyyətini itirə bilər. Belə hallara klassik mənada məxsusi hallar, uyğun idarələrə isə klassik mənada məxsusi idarələr deyirlər (bax məsələn, [5]).

Qeyd edək ki, adi diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərində klassik mənada məxsusi idarələrin tədqiqi [5, 6] və sair işlərdə müxtəlif üsullarla tədqiq edilmişdir.

Baxılan məsələ üçün optimallıq şərtləri ilk dəfə olaraq alınır.

Tərif 1. Əgər $v \in R^r$ və $(\theta,\xi) \in [t_0,t_1) \times [x_0,x_1)$ üçün

$$v' \frac{\partial^2 H\big(\theta,\xi,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi),\psi(\theta,\xi)\big)}{\partial u^2} v = 0$$

bərabərliyi ödənərsə, onda $u(t,x)$ klassik ekstremalına baxılan məsələdə klassik mənada məxsusi idarə deyəcəyik.

İndi fərz edək ki, $u(t,x)$ baxılan məsələdə klassik mənada məxsusi idarədir. Onda (17) bərabərsizliyində (27) düsturunu nəzərə alsaq görərik ki,

$$\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\int_{\xi}^{\xi+\varepsilon}\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} v'K(\tau,s,\alpha,\beta)v\,dsd\tau\,d\alpha d\beta +$$

$$+2\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\int_{\xi}^{\xi+\varepsilon}\left[\int_{\theta}^{t}\int_{\xi}^{x} v' \frac{\partial H^2\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u \partial z} Q(t,x,\tau,s) \times\right.$$

$$\left.\times\, \delta u(\tau,s;\varepsilon) ds d\tau\right] dx dt +$$

$$+\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} v' \frac{\partial^2 H\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)}{\partial u^2} v\,dx dt =$$

$$= \varepsilon^4 v'K(\theta,\xi,\theta,\xi)v + \frac{\varepsilon^4}{2} v' \frac{\partial^2 H\big(\theta,\xi,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi),\psi(\theta,\xi)\big)}{\partial u \partial z} Q(\theta,\xi,\theta,\xi)v + o(\varepsilon^4) \le 0.$$

Bu bərabərsizlikdən $\varepsilon > 0$-ın ixtiyariliyinə əsasən aşağıdakı hökm alınır.

Teorem 5. Klassik mənada məxsusi olan $u(t,x)$ klassik ekstremalının (1)-(3) məsələsində optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$v'\left[K(\theta,\xi,\theta,\xi)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H\big(\theta,\xi,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi),\psi(\theta,\xi)\big)}{\partial u\partial z}Q(\theta,\xi,\theta,\xi)\right]v\le 0$$

bərabərsizliyinin ixtiyari $v\in R^r$, $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ üçün ödənməsidir.

ƏDƏBİYYAT

1. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. *Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра*, Баку, ЭЛМ, 2013, 224 с.
2. Абуладзе А.А. *Задачи оптимального управления для систем, описываемых интегральными уравнениями*. Тбилиси. Изд.-во ТГУ, 1988, 127 с.
3. Миронов П.Г. *Об одном критерии оптимальности для систем, описываемых двумерными интегральными уравнениями типа Вольтерра,* В сб. Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. Чебоксары, ЧГУ, 1982, с. 66-72.
4. De La Vega C. *Necessary conditions for optimal terminal type control problems governed by a Volterra integral equations*, Journal of optimiz. theory and appl. 2006, vol. 130, №1, pp. 79-93.
5. Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Особые оптимальные управления*. M. URSS. 2013, 256 с.
6. Марданов М.Дж., Мансимов К.Б., Меликов Т.К. *Необходимые условия оптимальности второго порядка и исследование особых управлений в системах с запаздыванием*. Баку, Изд-во «ЭЛМ», 2011, 270 с.

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

1. "The Baku Engineering University Mathematics and Computer Science" accepts original unpublished articles and reviews in the research field of the author.
2. Articles are accepted in English.
3. File format should be compatible with **Microsoft Word** and must be sent to the electronic mail (**journal@beu.edu.az**) of the Journal. The submitted article should follow the following format:

- Article title, author's name and surname
- The name of workplace
- Mail address
- Abstract and key words

4. The title of the article should be in each of the three languages of the abstract and should be centred on the page and in bold capitals before each summary.
5. **The abstract** should be written in **9 point** type size, between **100** and **150** words. The abstract should be written in the language of the text and in two more languages given above. The abstracts of the article written in each of the three languages should correspond to one another. The keywords should be written in two more languages besides the language of the article and should be at least three words.
6. .**UDC** and **PACS** index should be used in the article.
7. The article must consist of the followings:

- Introduction
- Research method and research
- Discussion of research method and its results
- In case the reference is in Russian it must be given in the Latin alphabet with the original language shown in brackets.

8. **Figures, pictures, graphics and tables** must be of publishing quality and inside the text. Figures, pictures and graphics should be captioned underneath, tables should be captioned above.
9. **References** should be given in square brackets in the text and listed according to the order inside the text at the end of the article. In order to cite the same reference twice or more, the appropriate pages should be given while keeping the numerical order. For example: [7, p.15].

Information about each of the given references should be full, clear and accurate. The bibliographic description of the reference should be cited according to its type (monograph, textbook, scientific research paper and etc.) While citing to scientific research articles, materials of symposiums, conferences and other popular scientific events, the name of the article, lecture or paper should be given.

Samples:

a) ***Article:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure af monomerrik and dimeric conapeetes of carnosine üith zinc,* Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Book:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002

c) ***Conference paper:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information – Commu-nication Technologies in Science and education. II International Conference."*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*

References should be in 9-point type size.

10. The margins sizes of the page: - Top 2.8 cm. bottom 2.8 cm. left 2.5 cm, right 2.5 cm. The article main text should be written in Palatino Linotype 11 point type size single-spaced. Paragraph spacing should be 6 point.
11. The maximum number of pages for an article should not exceed 15 pages
12. The decision to publish a given article is made through the following procedures:

- The article is sent to at least to experts.
- The article is sent back to the author to make amendments upon the recommendations of referees.
- After author makes amendments upon the recommendations of referees the article can be sent for the publication by the Editorial Board of the journal.

YAZI VƏ NƏŞR QAYDALARI

1. "Journal of Baku Engineering University- Riyaziyyat və kompüter elmləri" - əvvəllər nəşr olunmamış orijinal əsərləri və müəllifin tədqiqat sahəsi üzrə yazılmış icmal məqalələri qəbul edir.
2. Məqalələr İngilis dilində qəbul edilir.
3. Yazılar **Microsoft Word** yazı proqramında, (**journal@beu.edu.az**) ünvanına göndərilməlidir. Göndərilən məqalələrdə aşağıdakılara nəzərə alınmalıdır:

- Məqalənin başlığı, müəllifin adı, soyadı,
- İş yeri,
- Elektron ünvanı,
- Xülasə və açar sözlər.

4. **Məqalədə başlıq hər xülasədən əvvəl** ortada, qara və böyük hərflə xülasələrin yazıldığı hər üç dildə olmalıdır.
5. **Xülasə** 100-150 söz aralığında olmaqla, 9 punto yazı tipi böyüklüyündə, məqalənin yazıldığı dildə və bundan əlavə yuxarıda göstərilən iki dildə olmalıdır. Məqalənin hər üç dildə yazılmış xülasəsi bir-birinin eyni olmalıdır. Açar sözlər uyğun xülasələrin sonunda onun yazıldığı dildə verilməklə ən azı üç sözdən ibarət olmalıdır.
6. Məqalədə UOT və PACS kodları göstərilməlidir.
7. Məqalə aşağıdakılardan ibarət olmalıdır:

- Giriş,
- Tədqiqat metodu
- Tədqiqat işinin müzakirəsi və onun nəticələri,
- İstinad ədəbiyyatı rus dilində olduğu halda orjinal dili mötərzə içərisində göstərməklə yalnız Latın əlifbası ilə verilməlidir.

8. **Şəkil**, **rəsm**, **grafik** və **cədvəllər** çapda düzgün, aydın çıxacaq vəziyyətdə və mətn içərisində olmalıdır. Şəkil, rəsm və grafiklərin yazıları onların altında yazılmalıdır. Cədvəllərdə başlıq cədvəlin üstündə yazılmalıdır.
9. **Mənbələr** mətn içərisində kvadrat mötərizə daxilində göstərilməklə məqalənin sonunda mətn daxilindəki sıra ilə düzülməlidir. Eyni mənbəyə iki və daha cox istinad edildikdə əvvəlki sıra sayı saxlanmaqla müvafiq səhifələr göstərilməlidir. Məsələn: [7,səh.15].

Ədəbiyyat siyahısında verilən hər bir istinad haqqında məlumat tam və dəqiq olmalıdır. İstinad olunan mənbənin biblioqrafik təsviri onun növündən (monoqrafiya, dərslik, elmi məqalə və s.) asılı olaraq verilməlidir. Elmi məqalələrə, simpozium, konfrans, və digər nüfuzlu elmi tədbirlərin materiallarına və ya tezislərinə istinad edərkən məqalənin, məruzənin və ya tezisin adı göstərilməlidir.

Nümunələr:

a) ***Məqalə:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure af monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc,* Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Kitab:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, 2002

c) ***Konfrans:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*

Mənbələr 9 punto yazı tipi böyüklüyündə olmalıdır.

10. **Səhifə ölçüləri:** üstdən 2.8 sm, altdan 2.8 sm, soldan 2.5 sm və sağdan 2.5 sm olmalıdır. Mətn 11 punto yazı tipi böyüklüyündə, **Palatino Linotype** yazı tipi ilə və tək simvol aralığında yazılmalıdır. Paraqraflar arasında 6 punto yazı tipi aralığında məsafə olmalıdır.
11. Orijinal tədqiqat əsərlərinin tam mətni bir qayda olaraq 15 səhifədən artıq olmamalıdır.
12. Məqalənin nəşrə təqdimi aşağıdakı qaydada aparılır:

- Hər məqallə ən azı iki ekspertə göndərilir.
- Ekspertlərin tövsiyələrini nəzərə almaq üçün məqalə müəllifə göndərilir.
- Məqalə, ekspertlərin tənqidi qeydləri müəllif tərəfindən nəzərə alındıqdan sonra Jurnalın Redaksiya Heyəti tərəfindən çapa təqdim oluna bilər.

YAZIM KURALLARI

1. "Journal of Baku Engineering University- Matematik ve Bilgisayar Bilimleri" önceler yayımlanmamış orijinal çalışmaları ve yazarın kendi araştırma alanın-da yazılmış derleme makaleleri kabul etmektedir.
2. Makaleler İngilizce kabul edilir.
3. Makaleler Microsoft Word yazı programında, (**journal@beu.edu.az**) adresine gönderilmelidir. Gönderilen makalelerde şunlar dikkate alınmalıdır:

- Makalenin başlığı, yazarın adı, soyadı,
- İş yeri,
- E-posta adresi,
- Özet ve anahtar kelimeler.

4. **Özet** 100-150 kelime arasında olup 9 font büyüklüğünde, makalenin yazıldığı dilde ve yukarıda belirtilen iki dilde olmalıdır. Makalenin her üç dilde yazılmış özeti birbirinin aynı olmalıdır. Anahtar kelimeler uygun özetin sonunda onun yazıldığı dilde verilmekle en az üç sözcükten oluşmalıdır.
5. Makalede UOT ve PACS tipli kodlar gösterilmelidir.
6. Makale şunlardan oluşmalıdır:

- Giriş,
- Araştırma yöntemi
- Araştırma
- Tartışma ve sonuçlar,
- İstinat Edebiyatı Rusça olduğu halde orjinal dili parantez içerisinde göstermekle yalnız Latin alfabesi ile verilmelidir.

7. **Şekil, Resim, Grafik** ve **Tablolar** baskıda düzgün çıkacak nitelikte ve metin içerisinde olmalıdır. Şekil, Resim ve grafiklerin yazıları onların alt kısımda yer almalıdır. Tablolarda ise başlık, tablonun üst kısmında bulunmalıdır.
8. **Kullanılan kaynaklar**, metin dâhilinde köşeli parantez içerisinde numaralandırılmalı, aynı sırayla metin sonunda gösterilmelidir. Aynı kaynaklara tekrar başvurulduğunda sıra muhafaza edilmelidir. Örneğin: [7,seh.15].

Referans verilen her bir kaynağın künyesi tam ve kesin olmalıdır. Referans gösterilen kaynağın türü de eserin türüne (monografi, derslik, ilmî makale vs.) uygun olarak verilmelidir. İlmi makalelere, sempozyum, ve konferanslara müracaat ederken makalenin, bildirinin veya bildiri özetlerinin adı da gösterilmelidir.

Örnekler:

a) ***Makale:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and Electronic Structure of Monomerik and Dimeric Conapeetes of Carnosine Üith Zinc,* Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Kitap:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002

c) ***Kongre:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*

Kaynakların büyüklüğü 9 punto olmalıdır.

9. **Sayfa ölçüleri**; üst: 2.8 cm, alt: 2.8 cm, sol: 2.5 cm, sağ: 2.5 cm şeklinde olmalıdır. Metin 11 punto büyüklükte **Palatino Linotype** fontu ile ve tek aralıkta yazılmalıdır. Paragraflar arasında 6 puntoluk yazı mesafesinde olmalıdır.
10. Orijinal araştırma eserlerinin tam metni 15 sayfadan fazla olmamalıdır.
11. Makaleler dergi editör kurulunun kararı ile yayımlanır. Editörler makaleyi düzeltme için yazara geri gönderilebilir.
12. Makalenin yayına sunuşu aşağıdaki şekilde yapılır:

- Her makale en az iki uzmana gönderilir.
- Uzmanların tavsiyelerini dikkate almak için makale yazara gönderilir.
- Makale, uzmanların eleştirel notları yazar tarafından dikkate alındıktan sonra Derginin Yayın Kurulu tarafından yayına sunulabilir.

13. Azerbaycan dışından gönderilen ve yayımlanacak olan makaleler için,(derginin kendilerine gonderilmesi zamani posta karşılığı) 30 ABD Doları veya karşılığı TL, T.C. Ziraat Bankası/Üsküdar-İstanbul 0403 0050 5917 No'lu hesaba yatırılmalı ve makbuzu üniversitemize fakslanmalıdır.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. «Journal of Baku Engineering University» - Математики и информатики публикует оригинальные, научные статьи из области исследования автора и ранее не опубликованные.
2. Статьи принимаются на английском языке.
3. Рукописи должны быть набраны согласно программы **Microsoft Word** и отправлены на электронный адрес **(journal@beu.edu.az)**. Отправляемые статьи должны учитывать следующие правила:

- Название статьи, имя и фамилия авторов
- Место работы
- Электронный адрес
- Аннотация и ключевые слова

4. **Заглавие статьи** пишется для каждой аннотации заглавными буквами, жирными буквами и располагается по центру. Заглавие и аннотации должны быть представлены на трех языках.
5. **Аннотация**, написанная на языке представленной статьи, должна содержать 100-150 слов, набранных шрифтом 9 punto. Кроме того, представляются аннотации на двух других выше указанных языках, перевод которых соответствует содержанию оригинала. Ключевые слова должны быть представлены после каждой аннотации на его языке и содержать не менее 3-х слов.
6. В статье должны быть указаны коды UOT и PACS.
7. Представленные статьи должны содержать:

- Введение
- Метод исследования
- Обсуждение результатов исследования и выводов.
- Если ссылаются на работу на русском языке, тогда оригинальный язык указывается в скобках, а ссылка дается только на латинском алфавите.

8. **Рисунки, картинки, графики и таблицы** должны быть четко выполнены и размещены внутри статьи. Подписи к рисункам размещаются под рисунком, картинкой или графиком. Название таблицы пишется над таблицей.
9. **Ссылки** на источники даются в тексте цифрой в квадратных скобках и располагаются в конце статьи в порядке цитирования в тексте. Если на один и тот же источник ссылаются два и более раз, необходимо указать соответствующую страницу, сохраняя порядковый номер цитирования. Например: [7, стр.15]. Библиографическое описание ссылаемой литературы должно быть проведено с учетом типа источника (монография, учебник, научная статья и др.). При ссылке на научную статью, материалы симпозиума, конференции или других значимых научных мероприятий должны быть указаны название статьи, доклада или тезиса.

Например:

a) ***Статья:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva I.N., Godjayev N.M. *Spatial and electronic structure of monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc,* Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Книга:*** Christie on Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles.* Fourth Edition, Prentice Hall, 2002

c) ***Конференция:*** Sadychov F.S, Fydin C,Ahmedov A.I. Appligation of Information-Communication Nechnologies in Science and education. II International Conference. *"Higher Twist Effects In Photon-Proton Collision",* Bakı,01-03 Noyabr, 2007, ss.384-391

Список цитированной литературы набирается шрифтом 9 punto.

10. **Размеры страницы:** сверху 2.8 см, снизу 2.8 см, слева 2.5 и справа 2.5. Текст печатается шрифтом **Palatino Linotype**, размер шрифта 11 punto, интервал-одинарный. Параграфы должны быть разделены расстоянием, соответствующим интервалу 6 punto.
11. Полный объем оригинальной статьи, как правило, не должен превышать 15 страниц.
12. Представление статьи к печати производится в ниже указанном порядке:

- Каждая статья посылается не менее двум экспертам.
- Статья посылается автору для учета замечаний экспертов.
- Статья, после того, как автор учел замечания экспертов, редакционной коллегией журнала может быть рекомендована к печати.