

FOUNDER

Havar Mammadov

EDITOR-IN-CHIEF

Hamzaga Orucov

CO-EDITORS

Agasi Melikov

EDITORIAL ADVISORY BOARD

Alekber Aliyev (Azerbaijan, Baku State University)

Abzeddin Adamov (Azerbaijan, ADA)

Arif Salimov (Azerbaijan, Baku State University)

Gorbachuk Valentina Ivanovna (Ukraine, Academy of Science)

Hamdulla Aslanov (Azerbaijan, Academy of Science)

Nadir Alisov (Ukraine, Academy of Science)

Rakib Efendiyev (Azerbaijan, Baku State University)

Sosnin Petr Ivanovich

(Russia, Ulyanovsk State Technical University)

Vagif Guliyev (Azerbaijan, Academy of Science)

INTERNATIONAL ADVISORY BOARD

Abdeljalil Nachaoui (France, Nantes University)

Barış Erbaş (Anadolu University, Turkey)

Che Soong Kim (Korea, Sangji University)

Chakib Abdelkrim (Morocco, Beni Mellal University)

Elshad Eyvazov (Azerbaijan, Baku State University)

Ekber Eliyev (Azerbaijan, National Academy of Science)

Garib Murshudov (York Academy, UK, London)

Golovko Vladimir Adamovich (Belarus, Brest State University)

Hamed Sari-Sarraf (USA, Texas Tech University)

Hari Srivastava (Canada, Victoria)

Hidayyat Guseynov (Azerbaijan, Baku State University)

Jauberteau Francois (France, Nantes University)

Kamil Mansimov (Azerbaijan, Baku State University)

Ludmila Prikazchikova (Keele University, England)

Mourad Nachaoui (France, Nantes University)

Rasim Alikuliyev (Azerbaijan, National Academy of Science)

Tarasenko Vladimir Petrovich

(National Technical University of Ukraine)

Telman Aliyev (Azerbaijan, National Academy of Science)

Telman Malikov (Azerbaijan, National Academy of Science)

Vedat Coşkun (Turkey, Işık University)

Vladimir B. Vasilyev (Russia, Lipetsk State Technical University)

Sabir Mirzayev (Azerbaijan, Baku State University)

Dimkov Mikhail Pakhomovich

(Belarus State Economic University)

Arquchintsev Alexander Valeryevich (Irkutsk State University)

EXECUTIVE EDITORS

Shafag Alizade

ASSISTANT EDITORS

Svetlana Denmuhammedovna

DESIGN

Ilham Aliyev

CONTACT ADDRESS

Journal of Baku Engineering University

AZ0102, Khirdalan city, Hasan Aliyev str. 120, Absheron, Baku, Azerbaijan

Tel: 00 994 12 - 349 99 95 Fax: 00 994 12 349-99-90/91

e-mail: journal@beu.edu.az

web: <http://journal.qu.edu.az>

facebook: [Journal Of Baku Engineering University](https://www.facebook.com/Journal-Of-Baku-Engineering-University)

Copyright © Baku Engineering University

ISSN 2521-635X

ISSN 2521-635X



Journal of Baku Engineering University

**MATHEMATICS AND
COMPUTER SCIENCE**

Baku - AZERBAIJAN

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

2020. Volume 4, Number 1

CONTENTS

BİR SİNİF PARABOLİK TƏLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN TƏRS MƏSƏLƏ HAQQINDA

Ədalət Axundov, Arəstə Həbibova _____ 3

SINGULYAR HƏYƏCANLANMIŞ ELLIPTİK TƏNLİK ÜÇÜN DAİRƏDƏ QOYULMUŞ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN ASIMPTOTİKASI

Səbzəliyev MəhİR Mirzəxan, İbrahimxəlilli Elşən Rövşən _____ 13

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ДВУХЭТАПНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Т.Ф. Мамедова _____ 20

THE DIRICHLET PROBLEM FOR OF SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

Sh. Yu. Salmanova _____ 28

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

Мамедова Т.Ф. _____ 35

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ПОПУЛЯЦИИ

А.И. Агамалиева _____ 40

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ДИСКРЕТНЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ

Наджафова М.Я. _____ 49

İNFORMASİYA ANLAYIŞI, İNFORMASİYA TEXNOLOGİYALARI

Rəna Əsgərova _____ 55

UOT:517.956

BİR SINIF PARABOLİK TƏLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN TƏRS MƏSƏLƏ HAQQINDA

Ədalət AXUNDOV

AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu
Bakı/AZƏRBAYCAN
adalatakhund@mail.ru

Arəstə HƏBİBOVA

Lənkəran Dövlət Universiteti
AZƏRBAYCAN
arasta.h@mail.ru

XÜLASƏ

Məqalədə məhdud oblastlarda ikinci tərtib parabolik tənliklər sistemində sağ tərəfin tapılması haqqında qeyri-xətti Dirixle sərhəd şərtləli çoxölçülü tərs məsələnin korrektiliyi araşdırılır. Axtarılan naməlum funksiyalar fəza dəyişənlərindən asılıdır. Naməlum funksiyaların tapılması üçün təklif olunan əlavə şərtlər qeyri-lokal (integral) şəkildə verilir.

Həllin yeganəliyi və şərti dayanıqlığı, baxılan məsələyə ekvivalent olan integral tənliklər sisteminin həllinin varlığı haqqında teoremlər isbat olunur.

Açar sözlər: tərs məsələ, parabolik tənliklər sistemi, yeganəlik, "şərti" dayanıqlıq, həllin varlığı.

THE INVERSE PROBLEM FOR A CLASS OF SYSTEMS OF PARABOLIC EQUATIONS

ABSTRACT

The work is devoted to the study of the inverse problem of determining the unknown right-honed side of a system of parabolic equations in the case of the Dirichlet condition. In the work the following results have been obtained: the theorem on the uniqueness and stability has been proved.

The theorem on the existence of a solution of a system of integral equations which equation lent to considered the problem of the considered problem has been proved.

Key words: inverse problem, the system of parabolic equation uniqueness, stability, existence.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

РЕЗЮМЕ

В работе исследована корректность обратной задачи об определении неизвестной правой части одной системы параболических уравнений второго порядка в случае нелинейного граничного условия Дирихле. Отыскиваемые коэффициенты зависят от пространственных переменных и дополнительные условия заданы в интегральном виде. Доказаны теоремы о единственности и устойчивости решения рассматриваемой задачи и о существовании решения системы интегральных уравнений, эквивалентной исходной задаче.

Ключевые слова: обратная задача, система уравнений параболического типа, единственность, «условная» устойчивость, существование решения.

Aşağıdakı işarələri qəbul edək: E^n – n ölçülü Evklid fəzasıdır, $B \subset E^n$ – kifayət qədər hamar ∂B sərhədli məhdud qabarıq oblastdır, $x = (x_1, \dots, x_n)$ – B oblastının ixtiyari nöqtəsidir, $\Omega = B \times (0, T]$, $S = \partial B \times [0, T]$, $0 < T = \text{const}$. $C^l(\cdot)$, $C^{l+\alpha}(\cdot)$, $C^{l, l/2}(\cdot)$, $C^{l+\alpha, (l+\alpha)/2}(\cdot)$, $l = 0, 1, 2$, $0 < \alpha < 1$, funksional fəzaları və bu fəzalarda normalar [1]-də olduğu kimi təyin olunur:

$$p = (p_1, \dots, p_m), \|p\|_{C^l(A)} = \|p\|_l = \sum_{k=1}^m \sum_{s=0}^l \sup_A |D_x^s p_k|,$$

$$\|p\|_{C^{l,q}(A)} = \|p\|_{l,q} = \sum_{k=1}^m \left[\sum_{s=0}^l \sup_A |D_x^s p_k| + \sum_{j=0}^q \sup_A |D_t^j p_k| \right],$$

$$p_{kt} = \frac{\partial p_k}{\partial t}, \quad p_{kx_i} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m},$$

$\frac{\partial p_k}{\partial v} - p_k(x, t)$ funksiyasının $(x, t) \in S$ nöqtəsində $\vec{v}(x, t)$ daxili normal üzrə törəməsidir. $\Delta p_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p_k}{\partial x_i^2}$ – Laplas operatorudur, $D_x^l p_k(x, t) - p_k(x, t)$ funksiyasının $(x, t) \in \Omega$ nöqtəsində $x_i, i = \overline{1, n}$ dəyişənlərinə nəzərən l tərtibli törəmələri, $D_t^q p_k(x, t) - p_k(x, t)$ funksiyasının t dəyişəninə nəzərən q tərtibli törəməsidir,

$$\int_B p_k(x, t) dx = \int_B \dots \int p_k(x_1, \dots, x_n, t) dx_1, \dots, dx_n$$

Naməlum $\{f_k(x), u_k(x, t), k = \overline{1, m}\}$ funksiyalar cütlərinin

$$u_{kt} - \Delta u_k = f_k(x) g_k(x, t), \quad (x, t) \in \Omega(1)$$

$$u_k(x, 0) = \varphi_k(x), \quad x \in \bar{B} \quad (2)$$

$$u_k(x, t) = \psi_k(x, t, \hat{u}_k), \quad (x, t) \in S \quad (3)$$

$$\int_0^T u_k(x, t) dt = r_k(x), \quad x \in \bar{B} \quad (4)$$

şərtlərindən tapılması haqqında məsələyə baxaq.

(1) – (4) məsələsində $g_k(\cdot), \varphi_k(\cdot), \psi_k(\cdot), r_k(\cdot), k = \overline{1, m}$ – verilmiş və tələb olunan hamırlıq şərtlərinə malik funksiyalardır, $\hat{u}_k = (u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_m)$.

Parabolik tip tənliklər sistemi üçün tərs məsələlər Ə.Y. Axundov [2], A.D. İskəndərov, Ə.Y. Axundov [3], A.Y. Axundov, A.H. Həsənova [4] və başqaları tərəfindən öyrənilmişdir.

Məsələ (1) – (4) –ün ilkin verilənləri üçün aşağıdakı mülahizələri qəbul edək:

$$1^0. g_k(x, t) \in C_{x,t}^{\alpha, \alpha/2}(\bar{B} \times [0, T]), \quad |g_k(x, t)| \geq \text{const} > 0, \quad (x, t) \in \bar{\Omega};$$

$$2^0. \varphi_k(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{B});$$

$$3^0. \psi_k(x, t, \hat{p}) \in C_{x,t}^{\alpha, \alpha/2}(\bar{B} \times [0, T] \times E^{m-1} = M);$$

$\psi_k(x, t, \hat{p})$ funksiyası M çoxluğunun hər bir məhdud altçoxluğunda p dəyişəninə nəzərən Lipsits şərtini ödəyir:

$$|\psi_k(x, t, \hat{p}^1) - \psi_k(x, t, \hat{p}^2)| \leq \text{const} \sum_{j=1}^m |\hat{p}_j^1 - \hat{p}_j^2|, \quad (x, t, \hat{p}^1), (x, t, \hat{p}^2) \in M;$$

$$4^0. r_k(x) \in C^{2+\alpha/2}(\bar{B}).$$

Tərif 1. $\{f_k(x), u_k(x, t), k = \overline{1, m}\}$ funksiyalar cütlərinə o zaman (1) – (4) məsələsinin həlli deyəcəyik ki, aşağıdakı şərtlər ödənilsin:

$$1) f_k(x) \in C(\bar{B});$$

$$2) u_k(x, t) \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega});$$

$$3) (1) - (4) \text{ münasibəti adi qaydada ödənilir.}$$

(1) – (4)mƏsƏlƏsi Adamar mƏnada korrekt olmayan–qeyri-korrekt mƏsƏlƏlƏr sinfinə daxildir. Bu mƏsƏlƏlƏrin hƏllinin varlığundan hƏmişƏ danışmaq olmaz. N¼munƏlƏrlƏ g¼stƏrmək olar ki, ƏgƏr qoyulmuş mƏsƏlƏnin hƏlli vardırsa belə, hƏllin yeganƏliyi vƏ ya ilkin verilƏnlƏrdən kƏsilməz asılılığı pozula bilir.

Dayanıqsız mƏsƏlƏlƏrin, o c¼mlƏdən baxılan (1) – (4)mƏsƏlƏsinin hƏll olunması zƏrurƏti (dƏqiq vƏ ya tƏqribi) ¼yrƏnilƏn mƏsƏlƏnin hƏlli anlayışının dƏqiqləşdirilmƏsini tƏlƏb edir. ŞƏrti korrekt mƏsƏlƏ–Tixonov mƏnada korrekt mƏsƏlƏlƏrin hƏlli dedikdə m¼mk¼n olan hƏllƏr çoxluğunun hƏr hansı bir m¼ƏyyƏn alt çoxluğə daralması kimi başə d¼ş¼l¼r. Bu halda qeyri-korrekt mƏsƏlƏ hƏttə korrekt mƏsƏlƏyƏ keçir.

TƏrif 2. ƏgƏr (1) – (4)mƏsƏlƏsinin tƏrif I mƏnada $\{f_k(x), u_k(x, t), k = \overline{1, m}\}$ hƏlli:

1) $f_k(x) \in C^\alpha(\bar{B}), |f_k(x)| \leq \text{const}, k = \overline{1, m}, x \in \bar{B};$

2) $u_k(x, t) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega}), |D_x^l u_k(x, t)| \leq \text{const}, l = 0, 1, 2, k = \overline{1, m}, (x, t) \in \bar{\Omega}$

şƏrtlƏrini ¼dƏyƏrsƏ, onda deyƏcƏyik ki, bu hƏll K^α çoxluğuna daxildir.

MƏlumdur ki, tƏrs mƏsƏlƏlƏrin hƏllinin yeganƏliyi haqqında teoremin isbatı vƏ hƏllin ilkin verilƏnlƏrdən kƏsilməz asılılığının g¼stƏricisi olan qiymƏtlƏndirmƏnin alınması bu tip mƏsƏlƏlƏrin korrektliyinin araşdırılmasında m¼h¼m yer tutur.

FƏrz edək ki, $\{f_k(x), u_k(x, t), k = \overline{1, m}\}$ c¼tlƏri (1) – (4)mƏsƏlƏsinin

$g_k(x, t), \varphi_k(x), \psi_k(x, t, \bar{u}), r_k(x), k = \overline{1, m}$ verilƏnlƏrinə nƏzƏrƏn, $\{\bar{f}_k(x), \bar{u}_k(x, t), k = \overline{1, m}\}$ c¼tlƏri isƏ (1) – (4)mƏsƏlƏsinin $\bar{g}_k(x, t), \bar{\varphi}_k(x), \bar{\psi}_k(x, t, \bar{u}), \bar{r}_k(x), k = \overline{1, m}$ verilƏnlƏrinə nƏzƏrƏn (bu mƏsƏlƏni (1) – (4)adlandıracağıq) tƏrif I mƏnada hƏllƏridir.

TƏrif 3. ƏgƏr ixtiyari $\varepsilon > 0$ qarşı elƏd $\delta > 0$ varsa ki,

$$\|g - \bar{g}\| < \delta, \|\varphi - \bar{\varphi}\| < \delta, \|\psi - \bar{\psi}\| < \delta, \|r - \bar{r}\| < \delta$$

olduqda $\|u - \bar{u}\| < \varepsilon, \|f - \bar{f}\| < \varepsilon$ olsun, onda deyƏcƏyik ki, (1) – (4)mƏsƏlƏsinin hƏlli ilkin verilƏnlƏrdən kƏsilməz asılıdır.

Teorem 1.FƏrz edək ki,

1) $g_k(x, t), \varphi_k(x), \psi_k(x, t, \bar{u}), r_k(x)$ vƏ $\bar{g}_k(x, t), \bar{\varphi}_k(x), \bar{\psi}_k(x, t, \bar{u}), \bar{r}_k(x), k = \overline{1, m}$ funksiyaları uyğ¼n olaraq $1^0, 2^0, 3^0, 4^0$ şƏrtlƏrini ¼dƏyir;

2) (1) – (4)vƏ(1) – (4)mƏsƏlƏlƏrinin K^α çoxluğuna daxil olan $\{f_k(x), u_k(x, t), k = \overline{1, m}\}$ vƏ $\{\bar{f}_k(x), \bar{u}_k(x, t), k = \overline{1, m}\}$ hƏllƏri vardır.

Onda elƏ $T^* \in (0, T]$ vardır ki, $\bar{B} \times [0, T^*]$ oblastında (1) – (4)mƏsƏlƏsinin hƏlli yeganƏdir vƏ aşığ¼dakı dayanıqlıq qiymƏtlƏndirməsi doğrudur:

$$\|u - \bar{u}\|_0 + \|f - \bar{f}\|_0 \leq c_1 [\|g - \bar{g}\|_0 + \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 + \|\psi - \bar{\psi}\|_0 + \|r - \bar{r}\|_2], \quad (5)$$

burada $c_1 > 0$ – (1) – (4)vƏ I(1) – (4)mƏsƏlƏlƏrinin verilƏnlƏrindən vƏ K^α çoxluğundan asılı sabitdir.

Teorem 1-in isbatı. ƏvvƏlcƏ (5) bƏrabƏrsizliyinin doğruluğunu isbat edək. HƏllin yeganƏliyi haqqında teoremi almaq ¼¼¼n aşığ¼da aparılan isbat prosesində hƏr yerdə $g_k(x, t) = \bar{g}_k(x, t), (x, t) \in \Omega, \varphi_k(x) = \bar{\varphi}_k(x), x \in \bar{B}, \psi_k(x, t, \bar{u}) = \bar{\psi}_k(x, t, \bar{u}), (x, t) \in S, r_k(x) = \bar{r}_k(x), x \in \bar{B}, k = \overline{1, m}$ g¼t¼rmək lazımdır.

(1) tənliyinin hər iki tərəfini t dəyişəninə nəzərən $(0, T)$ intervalında inteqrallasaq və teorem 1-in şərtlərini nəzərə alsaq, $f_k(x)$ funksiyası üçün yazı bilərik:

$$f_k(x) = [u_k(x, T) - \varphi_k(x) - \Delta r_k(x)] / \int_0^T g_k(x, t) dt, x \in \bar{B} \quad (6)$$

İşarə edək:

$$z_k(x, t) = u_k(x, t) - \bar{u}_k(x, t), \quad \lambda_k(x) = f_k(x) - \bar{f}_k(x),$$

$$\delta_{1k}(x, t) = g_k(x, t) - \bar{g}_k(x, t), \quad \delta_{2k}(x) = \varphi_k(x) - \bar{\varphi}_k(x),$$

$$\delta_{3k}(x, t, \hat{u}) = \psi_k(x, t, \hat{u}) - \bar{\psi}_k(x, t, \hat{u}), \quad \delta_{4k}(x) = r_k(x) - \bar{r}_k(x)$$

(1) – (4)məsələsinin münasibətlərindən $\overline{(1) - (4)}$ məsələsinin uyğun münasibətlərini çıxsaq, $\lambda_k(x)$, $w_k(x, t) = z_k(x, t) - \delta_{2k}(x)$, $k = \overline{1, m}$ funksiyaları üçün yazı bilərik:

$$w_{kt} - \Delta w_k = \lambda_k(x) g_k(x, t) + F_k(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \quad (7)$$

$$w_k(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{B} \quad (8)$$

$$w_k(x, t) = \delta_{3k}(x, t, \hat{u}) + P_k(x, t), \quad (x, t) \in S \quad (9)$$

$$\lambda_k(x) = [z_k(x, T) - \delta_{2k}(x) - \Delta \delta_{4k}(x)] / \int_0^T g_k(x, t) dt + H_k(x), \quad x \in \bar{B} \quad (10)$$

burada

$$F_k(x, t) = \bar{f}_k(x) \cdot \delta_{1k}(x, t) + \Delta \delta_{2k}(x), \quad (x, t) \in \bar{\Omega},$$

$$P_k(x, t) = \bar{\psi}_k(x, t, \hat{u}) - \bar{\psi}_k(x, t, \hat{u}) + \delta_{2k}(x), \quad (x, t) \in S,$$

$$H_k(x) = \left[(\bar{u}_k(x, T) - \bar{\varphi}_k(x) - \Delta \bar{r}_k(x)) \int_0^T \delta_{1k}(x, t) dt \right] / \left[\int_0^T g_k(x, t) dt \cdot \int_0^T \bar{g}_k(x, t) dt \right], \quad x \in \bar{B}$$

Teorem 1-in şərtləri daxilində (7) və (9) münasibətlərində

$$[\lambda_k(x) g_k(x, t) + F_k(x, t)] \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega})$$

$$[\delta_{3k}(x, t, \hat{u}) + P_k(x, t)] \in C^{\alpha, \alpha/2}(S)$$

olar. Bu o deməkdir ki, (7), (8), (9) münasibətlərindən $w_k(x, t)$ funksiyasının tapılması haqqında “düz” məsələnin $w_k(x, t) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega})$ yeganə klassik həlli vardır və bu həll aşağıdakı şəkildə göstərilə bilər [1]:

$$w_k(x, t) = \int_0^t \int_B \Gamma(x, t, \xi, \tau) [\lambda_k(\xi) g_k(\xi, \tau) + F_k(\xi, \tau)] d\xi d\tau + \\ + \int_0^t \int_{\partial B} \frac{\partial \Gamma(x, t, \xi, \tau)}{\partial \nu} [\delta_{3k}(\xi, \tau, \hat{u}) + P_k(\xi, \tau)] d\xi_0 d\tau, \quad (11)$$

burada $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_n$, $d\xi_0 = \partial B$ səthinin elementidir, $\Gamma(x, t, \xi, \tau) = w_{kt} - \Delta w_k = 0$ tənliyinin fundamental həllidir və aşağıdakı şəkildə göstərilir:

$$\Gamma(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} (t - \tau)^{-n/2} \exp \left[-\frac{\sum (x_i - \xi_i)^2}{4(t - \tau)} \right] \quad (t > \tau)$$

$$\chi = \|u - \bar{u}\|_0 + \|f - \bar{f}\|_0 \text{ işarə edək.}$$

$|z_k(x, t)|$, $k = \overline{1, m}$ funksiyasını qiymƏtlƏndirƏk. (11) bƏrabƏrliyində $w_k(x, t) = z_k(x, t) - \delta_{2k}(x)$ olduĐunu nəzərə alsaq, yaza bilƏrik:

$$z_k(x, t) = \delta_{2k}(x) + \int_0^t \int_B \Gamma(x, t, \xi, \tau) [\lambda_k(\xi) g_k(\xi, \tau) + F_k(\xi, \tau)] d\xi d\tau + \int_0^t \int_{\partial B} \frac{\partial \Gamma(x, t, \xi, \tau)}{\partial \nu} [\delta_{3k}(\xi, \tau, \hat{u}) + P_k(\xi, \tau)] d\xi_0 d\tau \quad (12)$$

Axırıncı bƏrabƏrlikdən alarıq:

$$|z_k(x, t)| \leq |\delta_{2k}(x)| + \int_0^t \int_B \Gamma(x, t, \xi, \tau) |[\lambda_k(\xi) g_k(\xi, \tau) + F_k(\xi, \tau)]| d\xi d\tau + \int_0^t \int_{\partial B} \left| \frac{\partial \Gamma(x, t, \xi, \tau)}{\partial \nu} \right| |[\delta_{3k}(\xi, \tau, \hat{u}) + P_k(\xi, \tau)]| d\xi_0 d\tau \quad (13)$$

(13) –də birinci toplanan ¼¼¼n yaza bilƏrik:

$$|\delta_{2k}(x)| \leq \|\varphi - \bar{\varphi}\|_0, \quad x \in \bar{B} \quad (14)$$

(13) bƏrabƏrsizliyinin ikinci toplananında iştirak edƏn $\int_B |\Gamma(x, t, \xi, \tau)| d\xi$ ifadəsi ¼¼¼n aşıĐıdakı qiymƏtlƏndirmə doĐrudur [1]:

$$\int_B |\Gamma(x, t, \xi, \tau)| d\xi \leq c_2 \quad (15)$$

(13) – də ikinci toplananda inteqralaltı $|\lambda_k(x)| |g_k(x, t)| + |F(x, t)|$ ifadəsi ilkin verilƏnlər və K^α çoxluĐu ¼¼¼rinə qoyulan şərtlər daxilində aşıĐıdakı bƏrabƏrsizliyi ¼¼¼yir:

$$|\lambda_k(x)| |g_k(x, t)| + |F_k(x, t)| \leq |\lambda_k(x)| |g_k(x, t)| + |\Delta \delta_{2k}(x)| + |f_k(x)| |\delta_{1k}(x, t)| \leq c_3 [\|\bar{g} - \bar{g}\|_0 + \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2] + c_4 \chi. \quad (16)$$

Burada $c_3, c_4 > 0$ –ilkin verilƏnlərdən və K^α çoxluĐundan asılı sabitlərdir.

(13) bƏrabƏrsizliyində ¼¼¼ncü toplananı qiymƏtlƏndirƏk. [1]-ə əsasən yaza bilƏrik:

$$\int_{\partial B} \left| \frac{\partial \Gamma(x, t, \xi, \tau)}{\partial \nu(x, t)} \right| d\xi \leq c_5 (t - \tau)^{\frac{1-\alpha}{2}} \quad (17)$$

Digər tərəfdən,

$$|\delta_{3k}(x, t, \hat{u}) + P_k(x, t)| \leq c_6 [\|\psi - \bar{\psi}\|_0 + \|\varphi - \bar{\varphi}\|_0] + c_7 \cdot \chi, \quad (18)$$

Burada $c_6, c_7 > 0$ –mƏsələlərin ilkin verilƏnlərindən və K^α çoxluĐundan asılı sabitlərdir.

(14), (15), (16), (18) bƏrabƏrsizliklərini (13) –də nəzərə alsaq, yaza bilƏrik:

$$|z_k(x, t)| \leq c_8 [\|\bar{g} - \bar{g}\|_0 + \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 + \|\psi - \bar{\psi}\|_0] + c_9 \chi t^{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad (x, t) \in \bar{Q}, \quad (19)$$

Burada $c_8, c_9 > 0$ –mƏsələlərin ilkin verilƏnlərindən və K^α çoxluĐundan asılı sabitlərdir.

İndi $|\lambda_k(x)|$, $k = \overline{1, m}$ funksiyasını qiymƏtlƏndirƏk. (10) düsturundan alarıq:

$$|\lambda_k(x)| \leq [|z_k(x, T)| + |\delta_{2k}(x)| + |\Delta \delta_{4k}(x)|] \Big/ \int_0^T |g_k(x, t)| dt + \left[(|\bar{u}_k(x, T)| + |\bar{\varphi}_k(x)| + |\Delta \bar{r}_k(x)|) \cdot \int_0^T |\delta_1(x, t)| dt \right] \Big/ \int_0^T |g_k(x, t)| dt \cdot \int_0^T |\bar{g}_k(x, t)| dt$$

Teorem 1-in şərtlərini nəzərə alsaq, yazı bilərik:

$$|\lambda_k(x)| \leq c_{10} \left[\|g - \bar{g}\|_0 + \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 + \|\psi - \bar{\psi}\|_0 + \|r - \bar{r}\|_2 \right] + c_{11} \chi t^{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad x \in \bar{B} \quad (20)$$

$c_{10}, c_{11} > 0$ – (1) – (4) və (1) – (4) məsələlərinin ilkin verilənlərindən və K^α çoxluğundan asılı sabitlərdir.

(19) və (20) bərabərsizlikləri ixtiyari $(x, t) \in \bar{B} \times [0, T]$ qiymətləri üçün ödənildiyindən, onlar sol tərəflərinin maksimal qiymətlərində də ödənilməlidir. Beləliklə, alırıq ki:

$$\|z\|_0 \leq c_{12} \left[\|g - \bar{g}\|_0 + \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 + \|\psi - \bar{\psi}\|_0 \right] + c_{13} \chi t^{\frac{1+\alpha}{2}},$$

$$\|\lambda\|_0 \leq c_{14} \left[\|g - \bar{g}\|_0 + \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 + \|\psi - \bar{\psi}\|_0 + \|r - \bar{r}\|_2 \right] + c_{15} \chi t^{\frac{1+\alpha}{2}}$$

Burada $c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15} > 0$ – (1) – (4) və (1) – (4) məsələlərinin ilkin verilənlərindən və K^α çoxluğundan asılı sabitlərdir.

Son iki bərabərsizliyi birləşdirsək alırıq:

$$\chi = c_{16} \left[\|g - \bar{g}\|_0 + \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 + \|\psi - \bar{\psi}\|_0 + \|r - \bar{r}\|_2 \right] + c_{17} \chi t^{\frac{1+\alpha}{2}} \quad (21)$$

Burada $c_{16}, c_{17} > 0$ ilkin verilənlərdən və K^α çoxluğundan asılı sabitlərdir.

Fərz edək ki, $T^* (0 < T^* \leq T)$ elə ədəddir ki, ixtiyari $t \in [0, T^*]$ üçün $c_{17} t^{\frac{1+\alpha}{2}} < 1$. Onda (21) –dən alırıq ki, ixtiyari $(x, t) \in \bar{B} \times [0, T^*]$ qiymətləri üçün (1) – (4) məsələsinin həlli dayanıqlıdır, yəni (5) qiymətləndirilməsi doğrudur.

(1) – (4) məsələsinin həllinin yeganəliyi (5) bərabərsizliyindən $g_k(x, t) = \bar{g}_k(x, t)$, $\varphi_k(x) = \bar{\varphi}_k(x)$, $\psi_k(x, t, \hat{u}) = \bar{\psi}_k(x, t, \hat{u})$, $r_k(x) = \bar{r}_k(x)$ qəbul etməklə alınır.

Teorem 1 isbat olundu.

Göstərmək olar ki, əgər (1) – (4) məsələsinin K^α çoxluğunda həlli varsa, onda ilkin verilənlər üzərinə qoyulmuş şərtlər daxilində (1) – (4) məsələsini ona ekvivalent olan məsələyə – integral tənliklər sistemi üçün olan məsələyə gətirmək olar.

$$u_k(x, t) = \varphi_k(x) + \int_0^t \int_B \Gamma(x, t, \xi, \tau) [f_k(\xi) g_k(\xi, \tau) + \Delta \varphi_k(\xi)] d\xi d\tau + \\ + \int_0^t \int_{\partial B} \frac{\partial \Gamma(x, t, \xi, \tau)}{\partial \nu} \psi_k(\xi, \tau, \bar{u}) d\xi_0 d\tau, \quad k = \overline{1, m} \quad (22)$$

$$f_k(x) = [u_k(x, T) - \varphi_k(x) - \Delta r_k(x)] / \int_0^T g_k(x, t) dt, \quad k = \overline{1, m} \quad (23)$$

(22), (23) integral tənliklər sisteminin həllinin varlığı ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə aşağıdakı qaydada aparılır: əvvəlcə $f_k^{(0)}(x) \in C^\alpha(\bar{B})$, $u_k^{(0)}(x, t) \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega})$ seçilir və aşağıdakı münasibətlərdən $s = 0$ olduqda $u_k^{(1)}(x, t)$ və $f_k^{(1)}(x)$ tapılır:

$$u_k^{(s+1)}(x, t) = \varphi_k(x) + \int_0^t \int_B \Gamma(x, t, \xi, \tau) [f_k^{(s)}(\xi) g_k(\xi, \tau) + \Delta \varphi_k(\xi)] d\xi d\tau + \\ + \int_0^t \int_{\partial B} \frac{\partial \Gamma(x, t, \xi, \tau)}{\partial \nu} \psi_k(\xi, \tau, \bar{u}^{(s)}) d\xi_0 d\tau \quad (24)$$

$$f_k^{(s+1)}(x) = [u_k^{(s+1)}(x, T) - \varphi_k(x) - \Delta r_k(x)] / \int_0^T g_k(x, t) dt \quad (25)$$

Göstərmək olar ki, $f_k^{(1)}(x) \in C^\alpha(\bar{B})$, $u_k^{(1)}(x, t) \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega})$.

$f_k^{(1)}(x)$ və $u_k^{(1)}(x, t)$ funksiyaları iterasiyanın növbəti addımında istifadə olunur və s.

Teorem 2. Fərz edək ki, $1^0, 2^0, 3^0, 4^0$ şərtləri ödənilir və $f_k^{(0)}(x) \in C^\alpha(\bar{B})$, $u_k^{(0)}(x, t) \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega})$, $k = \overline{1, m}$.

Onda elə $T_1 (0 < T_1 \leq T)$ vardır ki, $(x, t) \in \bar{B} \times [0, T_1]$ -də (22), (23) integral tənliklər sisteminin həlli vardır və $f_k(x) \in C(\bar{B})$, $u_k(x, t) \in C(\bar{B} \times [0, T])$.

Teorem 2-nin isbatı. $f_k^{(0)}(x) \in C^\alpha(\bar{B})$, $u_k^{(0)}(x, t) \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{B} \times [0, T])$ seçib, (24), (25) sxemləri üzrə iterasiyanı aparmaqla $\{f_k^{(s)}(x)\}$ və $\{u_k^{(s)}(x, t)\}$ ardıcılıqlarını almış olarıq. Bu ardıcılıqların müntəzəm məhdudluğunu və eyni dərəcədə kəsilməzliyini göstərək.

Lemma 1. Fərz edək ki,

- 1) $1^0, 2^0, 3^0, 4^0$ şərtləri ödənilir;
- 2) $f_k^{(0)}(x) \in C^\alpha(\bar{B})$, $u_k^{(0)}(x, t) \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega})$, $k = \overline{1, m}$.

Onda elə $T_2 (0 < T_2 \leq T)$ ədədi vardır ki, ixtiyari $(x, t) \in (\bar{B} \times [0, T_2])$ üçün $\{f_k^{(s)}(x)\}$ və $\{u_k^{(s)}(x, t)\}$, $k = \overline{1, m}$ ardıcılıqları müntəzəm məhduddur (sup norma üzrə).

Lemma 1-in isbatı. Əgər $f_k^{(0)}(x) \in C^\alpha(\bar{B})$ və $u_k^{(0)}(x, t) \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{B} \times [0, T])$ seçilibsə, onda [1]-də isbat olunan teoremin hökmünə əsasən (24), (25) – dən alarıq ki, $f_k^{(s)}(x) \in C^\alpha(\bar{B})$, $u_k^{(s)}(x, t) \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{B} \times [0, T_2])$, $k = \overline{1, m}$, $s = 1, 2, \dots$

(24) – dən alarıq:

$$\begin{aligned} |u_k^{(s+1)}(x, t)| &\leq |\varphi_k(x)| + \int_0^t \int_{\bar{B}} |\Gamma(x, t, \xi, \tau)| [|f_k^{(s)}(\xi)| |g_k(\xi, \tau)| + |\Delta \varphi_k(\xi)|] d\xi d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_{\partial B} \left| \frac{\partial \Gamma(x, t, \xi, \tau)}{\partial \nu} \right| |\psi_k(\xi, \tau, \hat{u}^{(s)})| d\xi_0 d\tau \quad (26) \end{aligned}$$

$\gamma^{(s)} = \|u^{(s)}\|_0 + \|f^{(s)}\|_0$ işarə edək.

(26) – də birinci toplanan üçün lemmanın şərtinə görə yazı bilərik:

$$|\varphi_k(x)| \leq \|\varphi\|_0, \quad x \in \bar{B} \quad (27)$$

(26) – də ikinci və üçüncü toplananın nüvəsi üçün aşağıdakı qiymətləndirmələr doğrudur:

$$\begin{aligned} \int_{E^n} |\Gamma(x, t, \xi, \tau)| d\xi &\leq c_1 \\ \int_{E^n} \left| \frac{\partial \Gamma(x, t, \xi, \tau)}{\partial x} \right| d\xi &\leq c_2(t - \tau)^{-\frac{1-\alpha}{2}} \quad (28) \end{aligned}$$

(26) – də ikinci toplananda integralaltı ifadə aşağıdakı kimi qiymətləndirilir:

$$|f_k^{(s)}(x)| |g_k(x, t)| + |\Delta \varphi_k(x)| \leq \|\varphi\|_2 + c_3 \gamma^{(s)}, \quad (x, t) \in \bar{B} \times [0, T] \quad (29)$$

(26) – də üçüncü toplananda inteqralaltı ifadə üçün yaza bilərik:

$$|\psi_k(x, t, \hat{u}^{(s)})| \leq c_4 \cdot \sum_{k=1}^m |\hat{u}_k^{(s)}| \leq c_4 \cdot \gamma^{(s)} \quad (30)$$

Beləliklə, (27), (28), (29) və (30) – u(26) – da nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$|u_k^{(s+1)}| \leq c_5 \|\varphi\|_2 + c_6 \gamma^{(s)} \cdot t^{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad (x, t) \in \bar{B} \times [0, T].$$

Axırıncı bərabərsizlik ixtiyari $(x, t) \in \bar{B} \times [0, T]$ üçün ödənilir. Deməli, bu bərabərsizlik sol tərəfin maksimal qiymətləri üçün də doğru olar:

$$\|u_k^{(s+1)}\|_0 \leq c_5 \|\varphi\|_2 + c_6 \gamma^{(s)} \cdot t^{\frac{1+\alpha}{2}} \quad (31)$$

Burada $c_5, c_6 > 0$ – ilkin verilənlərdən asılı sabitlərdir.

İndi $|f_k^{(s)}(x)|$ funksiyalarını qiymətləndirək. (25) münasibətindən yaza bilərik:

$$|f_k^{(s+1)}(x)| \leq \left[|u_k^{(s+1)}(x, T)| + |\varphi_k(x)| + |\Delta r_k(x)| \right] / \int_0^T |g_k(x, t)| dt$$

Lemma 1-in şərtlərini və (31) bərabərsizliyini nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$|f_k^{(s+1)}(x)| \leq c_7 [\|\varphi\|_2 + \|r\|_2] + c_8 \gamma^{(s)} \cdot t^{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad x \in \bar{B}.$$

$c_7, c_8 > 0$ – ilkin verilənlərindən asılı sabitlərdir.

Axırıncı bərabərsizlik ixtiyari $x \in \bar{B}$ üçün ödənilir. Deməli, bu bərabərsizlik həm də, sol tərəfin maksimal qiymətlərində ödənəcəkdir:

$$\|f_k^{(s+1)}\|_0 \leq c_7 [\|\varphi\|_2 + \|r\|_2] + c_8 \gamma^{(s)} \cdot t^{\frac{1+\alpha}{2}} \quad (32)$$

(31) və (32) bərabərsizliklərini birləşdirsək, yaza bilərik:

$$\gamma^{(s+1)} \leq c_9 [\|\varphi\|_2 + \|r\|_2] + c_{10} \gamma^{(s)} \cdot t^{\frac{1+\alpha}{2}} \quad (33)$$

$c_9, c_{10} > 0$ ilkin verilənlərdən asılı sabitlərdir.

(33) münasibəti ixtiyari $s = 1, 2, \dots$ qiymətləri üçün ödənilir.

Fərz edək ki, $T_2 (0 < T_2 \leq T)$ elə ədəddir ki, $c_{10} T_2^{\frac{1+\alpha}{2}} < 1$. $q = c_{10} T_2^{\frac{1+\alpha}{2}}$ işarə edək.

(33) münasibətini ardıcıl olaraq tətbiq etməklə ala bilərik:

$$\gamma^{(s+1)} \leq c_{10} [\|\varphi\|_2 + \|r\|_2] \cdot \frac{1 - q^{s+1}}{1 - q} + \gamma^{(0)} \cdot q^{s+1} \quad (34)$$

$q < 1$ olduğunu nəzərə alsaq, (34) münasibətindən $\{f_k^{(s)}(x)\}$ və $\{u_k^{(s)}(x, t)\}$ $k = \overline{1, m}$ ardıcılıqlarının müntəzəm məhdudluğu alınır.

$\{f_k^{(s)}(x)\}$ və $\{u_k^{(s)}(x, t)\}$ $k = \overline{1, m}$ ardıcılıqlarının eyni dərəcədə kəsilməzliyi aşağıdakı lemanın hökmündən alınır.

Lemma 2. Fərz edək ki, teorem 2-nin şərtləri ödənilir. Onda elə $T_3 (0 < T_3 \leq T)$ ədədi vardır ki, $(x, t) \in (\bar{B} \times [0, T_3])$ olduqda $\{f_k^{(s)}(x)\}$ və $\{u_k^{(s)}(x, t)\}$, $k = \overline{1, m}$ mardıcılıqları eyni dərəcədə kəsilməzdir (sup normada).

Lemma 2-in isbatı. Bir daha qeyd edək ki, (24) və (25) sxemində $f_k^{(0)}(x) \in C^\alpha(\bar{B})$, $u_k^{(0)}(x, t) \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q})$, $k = \overline{1, m}$ seçilsə, onda ixtiyari $s = 1, 2, \dots$ üçün $f_k^{(s)}(x) \in C^\alpha(\bar{B})$, $u_k^{(s)}(x, t) \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q})$ olar [1].

$(x, t), (\bar{x}, \bar{t}) \in \bar{Q}$ müxtəlif qiymətləri üçün (24) tənliklərini yenidən yazıb tərəf-tərəfə çıxsaq, alırıq:

$$\begin{aligned} & \left| u_k^{(s+1)}(x, t) - u_k^{(s+1)}(\bar{x}, \bar{t}) \right| \leq \left| u_k^{(s+1)}(x, t) - u_k^{(s+1)}(\bar{x}, t) \right| + \left| u_k^{(s+1)}(\bar{x}, t) - u_k^{(s+1)}(\bar{x}, \bar{t}) \right| \leq \\ & \leq |\varphi_k(x) - \varphi_k(\bar{x})| + \int_0^t \int_B |\Gamma(x, t; \xi, \tau) - \Gamma(\bar{x}, t, \xi, \tau)| \left[|f_k^{(s)}(\xi)| |g_k(\xi, \tau)| + |\Delta \varphi_k(\xi)| \right] d\xi d\tau + \\ & \int_0^t \int_{\partial B} \left| \frac{\partial \Gamma(x, t; \xi, \tau)}{\partial \nu} - \frac{\partial \Gamma(\bar{x}, t; \xi, \tau)}{\partial \nu} \right| |\psi_k(\xi, \tau, \bar{u})| d\xi_0 d\tau + \int_0^{\bar{t}} \left| \frac{\partial \delta(\bar{x}, t; \xi, \tau)}{\partial \nu} - \frac{\partial \Gamma(\bar{x}, \bar{t}; \xi, \tau)}{\partial \nu} \right| \\ & \cdot |\psi_k(\xi, \tau, \bar{u}^{(s)})| d\xi_0 d\tau + \int_{\bar{t}}^t \left| \frac{\partial \Gamma(\bar{x}, t; \xi, \tau)}{\partial \nu} \right| \cdot |\psi_k(\xi, \tau, \bar{u}^{(s)})| d\xi_0 d\tau \end{aligned}$$

Lemma 2-nin şərtlərini $\{f_k^{(s)}(x)\}$ və $\{u_k^{(s)}(x, t)\}$, $k = \overline{1, m}$ mardıcılıqlarının müntəzəm məhdudluğunu və fundamental həll üçün aşağıdakı qiymətləndirmələri [1]

$$|D_x^l \Gamma(x, t, \xi, \tau) - D_x^l \Gamma(\bar{x}, t, \xi, \tau)| \leq \text{const} |x - \bar{x}|^\alpha \cdot (t - \tau)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-\text{const} \frac{|x - \xi|^2}{t - \tau}\right), l = 0, 1, 2$$

$$|\Gamma(x, t, \xi, \tau) - \Gamma(x, \bar{t}, \xi, \tau)| \leq \text{const} |t - \bar{t}|^\alpha \cdot (t - \tau)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-\text{const} \frac{|x - \xi|^2}{t - \tau}\right), t > \bar{t} > \tau$$

nəzərə alıb (32) bərabərsizliyinin çıxarılışında olduğu kimi hesablamalar aparsaq, axırıncı bərabərsizlikdən $\{u_k^{(s)}(x, t)\}$, $k = \overline{1, m}$ mardıcılıqlarının eyni dərəcədə kəsilməzliyini almış olarıq.

$\{f_k^{(s)}(x)\}$, $k = \overline{1, m}$ mardıcılıqlarının eyni dərəcədə kəsilməzliy lemmasının şərtləri daxilində aşağıdakı bərabərsizlikdən alınır:

$$\begin{aligned} & \left| f_k^{(s+1)}(x) - f_k^{(s+1)}(\bar{x}) \right| \leq \left[\left| u_k^{(s+1)}(x, T) - u_k^{(s+1)}(\bar{x}, T) \right| + |\varphi_k(x) - \varphi_k(\bar{x})| + |\Delta r_k(x) - \Delta r_k(\bar{x})| \right] \int_0^T g_k(x, t) dt + \\ & \left\{ \left[\left| u_k^{(s+1)}(x, T) \right| + |\varphi_k(\bar{x})| + |\Delta r_k(\bar{x})| \right] \int_0^T |g_k(x, t) - g_k(\bar{x}, t)| dt \right\} / \int_0^T g_k(x, t) dt \cdot \int_0^T g_k(\bar{x}, t) dt. \end{aligned}$$

Lemma 2 isbat olundu.

Arsel [1] teoreminə əsasən $\{f_k^{(s)}(x)\}$ və $\{u_k^{(s)}(x, t)\}$, $k = \overline{1, m}$ mardıcılıqlarından elə altardıcılıqlar seçmək olar ki, onlar uyğun olaraq $f_k^*(x)$, $u_k^*(x, t)$ funksiyalarına yığılsın və $f_k^*(x) \in C(\bar{B})$, $u_k^*(x, t) \in C(\bar{Q})$.

(24) və (25) münasibətlərində $s \rightarrow \infty$ olduqda limitə keçsək alırıq:

$$u_k^*(x, t) = \varphi_k(x) + \int_0^t \int_B \Gamma(x, t, \xi, \tau) [f_k^*(\xi) g_k(\xi, \tau) + \Delta \varphi_k(\xi)] d\xi d\tau + \\ + \int_0^t \int_{\partial B} \frac{\partial \Gamma(x, t, \xi, \tau)}{\partial \nu} \psi_k(\xi, \tau, \bar{u}^*) d\xi_0 d\tau.$$

$$f_k^*(x) = [u_k^*(x, T) - \varphi_k(x) - \Delta r_k(x)] / \int_0^T g_k(x, t) dt.$$

Beləliklə, $f_k^*(x)$ və $u_k^*(x, t)$, $k = \overline{1, m}$ funksiyaları (22), (23) integral tənliklər sistemini ödəyir.

Teorem 2 isbat olundu.

ƏDƏBİYYAT

1. О.А. Ладыженская, В.А. Солошников, Н.Н. Уралцева. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва, «Наука», 1967, 736 с.
2. А.Я. Ахундов, Обратная задача для системы параболических уравнений // Дифференц. уравнения», 1988. Т.24, с.520-528.
3. А.Д. Искендеров, А.Я. Ахундов. Обратная задача для линейной системы параболических уравнений. ДАН РАН, 2009. Т.424. №4. С.442-444.
4. А.Я. Akhundov, A.J. Gasanova. Determination of the coefficient of a semilinear parabolic equation in the case of boundary-value problem with nonlinear boundary condition. "Ukrainian Mathematical Journal", 2014, Volume 66, No6, pp. 847-852.

UOT: 517.95

SINGULAR HƏYƏCANLANMIŞ ELLİPTİK TƏNLİK ÜÇÜN DAİRƏDƏ QOYULMUŞ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN ASİMPOTİKASI

SƏBZƏLİYEV Mahir Mirzəxan, İBRAHİM XƏLİLLİ Elşən Rövşən

Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti
sabzaliev@mail.ru

XÜLASƏ

İşdə yüksək tərtibli törəmələri qarşısında kiçik parametrlər olan və bir tərtibli adi diferensial tənliyə cırlaşan iki tərtibli elliptik tənlik üçün dairədə qoyulmuş sərhəd məsələsinin həllinin tam asimptotikası qurulur. Bunun üçün iki iterasiya prosesi aparılır. Birinci iterasiya prosesində alınan sərhəd məsələlərinin həllərinin diferensial xassələri tədqiq edilərkən göstərilir ki, bu həllər cırlaşan tənliyin xarakteristikasının sərhəddə toxunma nöqtələrində məxsusiyyətə malikdirlər. Əvvəlcə müvafiq şərtlər müəyyən edilərək, bu məxsusiyyətlər aradan qaldırılır və birinci iterasiya prosesi başa çatdırılır. Sonra ikinci iterasiya prosesi aparılaraq sərhəddin sərhəd şərtinin ödənilmədiyi hissəsi yaxınlığında sərhəd zolaq tipli funksiyalar qurulur. Nəhayət asimptotik ayrılış üçün alınan qalıq həddi qiymətləndirilir.

Açar sözlər: asimptotik ayrılış, sərhəd zolaq tipli funksiya, qalıq həddi.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В КРУГЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

РЕЗЮМЕ

В работе стоит полная асимптотика решения краевой задачи в круге для эллиптического уравнения второго порядка, содержащий малый параметр при старших производных и вырождающегося в обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Для этой цели проводится два итерационных процесса. При исследовании дифференциальных свойств решений краевых задач, которые получены в первом итерационном процессе оказалось, что эти решения имеют особенности в точках касания характеристики вырожденного уравнения с границей рассматриваемой области. Сначала с помощью определенных условий эти особенности устраняются и первый итерационный процесс завершается. Далее, проводя второй итерационный процесс строятся функции типа пограничных слоев вблизи той части границы, где краевое условие не выполняется. Наконец оценивается остаточный член, который получен для асимптотического разложения.

Ключевые слова: Асимптотическое разложение, функция типа пограничного слоя, остаточный член.

ASYMPTOTICS OF SOLVING THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SINGULARLY PERTURBED ELLIPTIC EQUATION IN A CIRCLE

SUMMARY

In this paper, the complete asymptotics of the solution of a boundary value problem in a circle for an elliptic equation of the second order, containing a small parameter at the highest derivatives and degenerating into an ordinary differential equation of the first order, is presented. For this purpose, two iterative processes are carried out. In the study of the differential properties of solutions to boundary value problems that were obtained in the first iterative process, it turned out that these solutions have singularities at the points of tangency of the characteristic of the degenerate equation with the boundary of the considered domain. First, with the help of certain conditions, these features are eliminated and the first iterative process ends. Further, carrying out the second iterative process, functions of the type of boundary layers are constructed near that part of the boundary where the boundary condition is not satisfied. Finally, the remainder is estimated, which is obtained for the asymptotic expansion.

Keywords: Asymptotic expansion, boundary layer type function, remainder.

1. Giriş: Həyatda baş verən real proseslərin demək olar ki, heç biri ideal şəraitdə baş vermirlər, bu proseslərə müəyyən xarici amillər təsir edirlər. Bu xarici amillər nəzərə alınmadıqda proseslər adekvat təsvir olunmurlar. Prosesin riyazi modeli diferensial tənlik ilə təsvir olunduqda xarici amillər bu tənlikdə müəyyən hədlər qarşısında duran kiçik parametrlər ilə ifadə olunurlar. Belə hədlərə həyəcanlanmış hədlər deyilir. Diferensial tənlikdə kiçik parametr aşağı tərtibli hədlərin qarşısında durduqda belə tənliklərə requlyar həyəcanlanmış, yüksək tərtibli hədlərin qarşısında durduqda isə sinqulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklər deyilir. Requlyar həyəcanlanmış məsələlər ilk dəfə A. Puankare tərəfindən ətraflı tədqiq olunmuşdur. Hazırda requlyar həyəcanlanmış diferensial tənliklər kifayət qədər yaxşı öyrənilmiş hesab olunur, hətta bu sahədəki nəticələrin bəziləri universitet dərslərinə daxil edilmişdir. Sinqulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklərin tədqiqi requlyar həyəcanlanmış diferensial tənliklər ilə müqayisədə təxminən yüz il gecikmişdir. Keçən əsrin 40-cı illərindən başlayaraq sinqulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklərin tədqiqinə həsr olunmuş məqalələri çap olunmağa başlayır. Bu sahədə ilk tədqiqatlardan biri A.N. Tixonova məxsusdur ([1], [2]). Hazırda sinqulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklər üçün qoyulmuş sərhəd məsələlərinin həllərinin kiçik parametmə nəzərən ayrılışlarının qurulmasına aid müxtəlif asimptotik üsullar mövzudur. Lakin tətbiq dairəsinin genişliyi və riyazi əsaslandırılmasının mükəmməlliyinə görə dünyada mövcud olan asimptotik metodlar arasında ən effektiv olanı M.İ. Vişik və L.A. Lyüsternik tərəfindən işlənmiş və məzmunu onların [3], [4] əsərlərində şərh olunmuş asimptotik metoddur. Bu asimptotik metod bütün dünyada "Vişik -Lyüsternik metodu" adı altında tanınır.

Sinqulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklərin klassik tiplərinin hər birinə aid çoxlu sayda tədqiqatlar aparılmışdır. Klassik tiplərə aid olmayan sinqulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklərə aid tədqiqatlar ilə bağlı M.M. Səbzəliyev və İ. M. Səbzəliyevanın [5] monoqrafiyasında ətraflı məlumat verilmişdir. Sinqulyar həyəcanlanmış elliptik diferensial tənliklərə həsr olunmuş tədqiqatlara misal olaraq [6]- [12] işlərini göstərmək olar. Lakin bu işlərin əksəriyyətində cırılmış məsələlərin həlləri kifayət qədər hamar funksiyalardır. Bu işdə baxılan məsələdə isə cırılmış məsələnin həlli hamar olmayıb, cırılmış tənliyin xarakteristikalarının çevrəyə toxunma nöqtələrində məxsusiyyətə malikdir. Belə məsələləri akademik A. M. İlin bisingulyar məsələlər adlandırmışdır.

2. Məsələnin qoyuluşu. Mərkəzi koordinat başlanğıcında olan vahid radiuslu $\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ dairəsində aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxılır:

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon \Delta u - \frac{\partial u}{\partial x} + au = f(x, y), \quad (1)$$

$$u|_\Gamma = 0. \quad (2)$$

Burada $\varepsilon > 0$ -kiçik parametr, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - Laplas operatoru, $a > 0$ -sabit, $f(x, y)$ - verilmiş funksiya, Γ -isə Ω dairəsinin sərhəddi olan çevrədir: $\Gamma = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$.

Bu işdə məqsəd (1),(2) sərhəd məsələsinin həllinin kiçik parametmə nəzərən asimptotik ayrılışını qurmaqdır. Asimptotik ayrılışı qurmaq üçün Vişik-Lyüsternik metodundan istifadə edilərək, iterasiya prosesləri aparılır.

3. Birinci iterasiya prosesi. Bu iterasiya preseində (1) tənliyinin təqribi həlli

$$W = W_0 + \varepsilon W_1 + \dots + \varepsilon^n W_n \quad (3)$$

şəklində axtarılır. Buradakı W_i ; $i = 0, 1, \dots, n$ funksiyaları hələlik naməlum funksiyalardır. Bu naməlum funksiyaları tapmaq üçün (1) tənliyində u funksiyası əvəzinə W funksiyasının (3) ayrılışını yazıb, ε -nün eyni dərəcəli qüvvətlərinə nəzərən qruplaşdırma aparılır. Naməlum W_i ; $i = 0, 1, \dots, n$ funksiyalarını təyin etmək üçün aşağıdakı adi diferensial tənliklər alınır:

$$-\frac{\partial W_0}{\partial x} + aW_0 = f(x, y), \quad (4)$$

$$-\frac{\partial W_i}{\partial x} + aW_i = \Delta W_{i-1}; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

(4) tənliyi (1) tənliyindən $\varepsilon = 0$ olduqda alınan tənlikdir. Sonrakı (5) tənlikləri isə (4) tənliyindən yalnız sağ tərəfləri ilə fərqlənirlər.

(4), (5) diferensial tənliklərinin xarakteristikaları $y = c = \text{const}$ düz xətləridir. Bu düz xətlərdən yalnız iki dənəsi, $y = -1$ və $y = 1$ xarakteristikaları Γ sərhəddinə toxunurlar. $A(0; -1)$ və $B(0; 1)$ toxunma nöqtələri Γ çevirəsini elə iki Γ_1 və Γ_2 yarımçevirlərinə bölürlər ki, hər bir $y = c$, $(-1 < c < 1)$ düz xətti x -in artması ilə əvvəl Γ_1 , sonra isə Γ_2 yarımçevrəsini kəsir. Onda aydındır ki, Γ_2 yarımçevirəsinin tənliyi $x = \sqrt{1 - y^2}$, $(-1 \leq y \leq 1)$ olar. (4), (5) diferensial tənlikləri üçün

$$W_0|_{\Gamma_2} = 0, \quad (6)$$

$$W_i|_{\Gamma_2} = 0; \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (7)$$

sərhəd şərtlərindən istifadə ediləcəkdir. (4), (6) sərhəd məsələsinə (1), (2) sərhəd məsələsinə uyğun olan cırlaşmış məsələ deyilir.

Aydındır ki, (4), (6) məsələsinin həlli

$$W_0(x, y) = \int_{\sqrt{1-y^2}}^x e^{a(x-t)} f(t, y) dt \quad (8)$$

düsturu ilə təyin edilir. $f(x, y)$ hamar funksiya olduqda (8) düsturundan alınır ki, $W_0(x, y)$ funksiyası özü və onun x dəyişəninə nəzərən törəmələri kəsilməyən funksiyalardır. Lakin (8) düsturu ilə təyin olunan $W_0(x, y)$ funksiyasının y dəyişəninə nəzərən törəmələri $A(0; -1)$ və $B(0; 1)$ nöqtələrində məxsusiyyətə malikdirlər. Doğrudan da, (8) bərabərliyinin hər iki tərəfini y dəyişəninə nəzərən diferensiasladığımızda

$$\frac{\partial W_0(x, y)}{\partial y} = \int_{\sqrt{1-y^2}}^x e^{a(x-t)} \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} dt - f(\sqrt{1-y^2}, y) \cdot (\sqrt{1-y^2})' \cdot e^{a(x-\sqrt{1-y^2})} \quad (9)$$

alınır. Aydındır ki $\sqrt{1-y^2}$ funksiyasının törəmələri $y = -1$ və $y = 1$ olduqda məxsusiyyətə malikdirlər. (9) düsturundan alınır ki, $W_0(x, y)$ funksiyasının y dəyişəninə nəzərən törəmələri $A(0; -1)$ və $B(0; 1)$ nöqtələrində məxsusiyyətə malikdirlər.

İsbat etmək olar ki, $\sqrt{1-y^2}$ funksiyasının törəmələri üçün aşağıdakı düstur doğrudur.

$$\frac{d^s}{dy^s} \sqrt{1-y^2} = \frac{P_s(y)}{(1-y^2)^{\frac{2s-1}{2}}}. \quad (10)$$

Burada $P_s(y)$ müəyyən çoxhədlidir. (10) düsturundan istifadə edərək göstərmək olar ki, $f(x, y)$ funksiyası $y \rightarrow \pm 1$ şərtində

$$f(\sqrt{1-y^2}, y) = O\left[(1-y^2)^{2n+\frac{3}{2}}\right] \quad (11)$$

şərtini ödədikdə (8) düsturu ilə təyin olunan $W_0(x, y)$ funksiyasının y dəyişəninə nəzərən $2n+2$ tərtibə qədər bütün törəmələri $A(0; -1)$ və $B(0; 1)$ nöqtələrində məxsusiyyətə malik olmayan funksionalardır.

Qeyd etmək lazımdır ki, (11) şərti yalnız (4), (6) məsələsinin həllinin hamarlığını deyil, həm də (5), (7) məsələlərinin həlləri olan $W_1(x, y), W_2(x, y), \dots, W_n(x, y)$ funksiyalarının hamarlığını təmin edir.

Beləliklə, birinci iterasiya prosesində (1) tənliyinin elə $W = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i W_i$ təqribi həlli quruldu ki, bu həll

$$W|_{\Gamma_2} = 0 \quad (12)$$

sərhəd şərtini ödəyir. Lakin W funksiyası Γ_1 üzərində (2) sərhəd şərtini ödəməyə bilər. Ona görə ikinci iterasiya prosesi apararaq Γ_1 yaxınlığında sərhəd zolaq elə funksiya qurulmalıdır ki, Γ_1 üzərində itən sərhəd şərtinin ödənilməsinə təmin etsin.

3. İkinci iterasiya prosesi. İkinci iterasiya prosesini aparmaq üçün əvvəlcə Γ_1 yaxınlığında (ρ, φ) lokal koordinatlarına keçib, L_ε operatorunun Γ_1 yaxınlığında kiçik parametrlə nəzərdən yeni ayrılışını yazmaq lazımdır. Burada ρ^- ilə Γ_1 yaxınlığındakı nöqtədən, sərhəddin daxili normalı üzrə sərhəddə qədər olan məsafə, φ^- ilə bu normalın Γ_1 sərhəddi üzərində olan oturacağıın koordinatı işarə olunmuşdur. (ρ, φ) koordinatlarında L_ε operatoru aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon,1} u \equiv & -\varepsilon \left\{ \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + 2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \varphi} + \right. \\ & \left. + \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\} - \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + au. \end{aligned} \quad (13)$$

Operatorun (13) ayrılışında $\rho = \varepsilon \tau$ əvəzləməsi aparıb, yeni (ρ, φ) koordinatlarından asılı əmsalları $(0, \varphi)$ nöqtəsində Taylor düsturu üzrə ayrılıb aşağıdakı işarələri qəbul edək:

$$\delta_1^2(\varphi) = \left\{ \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{(0,\varphi)} \right]^2 + \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} \Big|_{(0,\varphi)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\delta_2^2(\varphi) = \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{(0,\varphi)} = \cos(\nu, x) \Big|_{\Gamma_1} > 0.$$

ν ilə Γ_1 sərhədinə çəkilmiş daxili normal işarə edilmişdir.

Bu işarələmələri nəzərə alıb, Γ_1 yaxınlığındakı sərhəd zolaq tipli funksiyanı $L_{\varepsilon,1}V = 0$ tənliyinin təqribi həlli kimi

$$V = V_0 + \varepsilon V_1 + \dots + \varepsilon^n V_n + \varepsilon^{n+1} V_{n+1} \quad (14)$$

şəklində axtardıqda (14) bərabərliyinin sağ tərəfinə daxil olan naməlum $V_j; j = 0, 1, \dots, n+1$ funksiyalarını təyin etmək üçün aşağıdakı diferensial tənliklər alınır:

$$\delta_1^2(\varphi) \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2} + \delta_2^2(\varphi) \frac{\partial V_0}{\partial \tau^2} = 0, \quad (15)$$

$$\delta_1^2(\varphi) \frac{\partial^2 V_s}{\partial \tau^2} + \delta_2^2(\varphi) \frac{\partial V_s}{\partial \tau^2} = M_s; s = 1, 2, \dots, n+1. \quad (16)$$

Burada M_s ilə $V_0, V_1, \dots, V_{s-1}; s = 1, 2, \dots, n+1$ funksiyalarından asılı olan məlum funksiyalar işarə olunmuşlar.

Tələb edək ki, $W + V$ cəmi

$$(W + V) \Big|_{\Gamma_1} = 0 \quad (17)$$

sərhəd şərtini ödəsin. W funksiyasının (3)-dəki, V funksiyasının isə (14)-dəki ayrılışını (17) bərabərliyində yazıb, ε -nin eyni dərəcəli qüvvətlərini müqayisə edərək (15), (16) diferensial tənlikləri üçün sərhəd şərtlərinin aşağıdakı kimi olduğu tapılır:

$$V_i \Big|_{\tau=0} = -W_i \Big|_{\Gamma_1}; i = 0, 1, \dots, n; \quad V_{n+1} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (18)$$

Beləliklə, V_0 funksiyası (15) tənliyinin (18), ($i = 0$ olduqda) sərhəd şərtini ödəyən sərhəd zolaq tipli həllidir. (15) adi diferensial tənliyinə uyğun olan xarakteristik tənliyin bir mənfi

$$\lambda = -\frac{\delta_2^2(\varphi)}{\delta_1^2(\varphi)}.$$

kökü vardır: Bu fakt onu bildirir ki, (1), (2) sərhəd məsələsi Γ_1 sərhədi üzərində requlyar cırqlaşır. Aydındır ki, (15), (18), ($i = 0$ olduqda) məsələsinin sərhəd zolaq tipli həlli

$$V_0(\tau, \varphi) = -W_0 \Big|_{\Gamma_1} \cdot e^{-\frac{\delta_2^2(\varphi)}{\delta_1^2(\varphi)} \tau}$$

düsturu ilə təyin edilir. Proses davam etdirilərək $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ funksiyaları (16), (18), ($i = 1, 2, \dots, n+1$) məsələlərinin sərhəd zolaq tipli həlləri kimi təyin edirlər. Qurulan bütün V_j funksiyaları

hamarlayıcı funksiyalara vurularaq alınan yeni funksiyalar üçün əvvəlki, $V_j; j = 0, 1, \dots, n+1$ işarələri saxlanılır.

4. Qalıq həddinin qiymətləndirilməsi və əsas nəticə. Beləliklə, (1),(2) sərhəd məsələsinin həlli üçün kiçik parametrin qüvvətlərinə nəzərən aşağıdakı asimptotik ayrılış alındı:

$$u = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i W_i + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^j V_j + \varepsilon^{n+1} z. \quad (19)$$

Burada $\varepsilon^{n+1} z$ qalıq həddidir. İndi isə qalıq həddinin qiymətləndirilməsinə keçək. İterasiya proseslərində alınmış diferensial tənliklərdən və (2), (12), (17) sərhəd şərtlərindən alınır ki, z funksiyası aşağıdakı sərhəd məsələsinin həllidir:

$$-\varepsilon \Delta z - \frac{\partial z}{\partial x} + az = H(\varepsilon, x, y), \quad (20)$$

$$z|_{\Gamma} = 0. \quad (21)$$

Buradakı $H(\varepsilon, x, y)$ funksiyası ε kiçik parametrinin $[0, \varepsilon_0)$ aralığından olan bütün qiymətlərində Ω oblastında məhdud olan funksiyadır. (20) diferensial tənliyinin hər iki tərəfini z funksiyasına vurub, alınan bütün hədləri (21) sərhəd şərtini nəzərə almaqla Ω oblastı üzrə integralladıqda, müəyyən çevirmələrdən sonra z funksiyası üçün aşağıdakı qiymətləndirilmənin doğru olduğu alınır:

$$\varepsilon \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + c_1 \iint_{\Omega} z^2 dx dy \leq c_2. \quad (22)$$

Buradakı $c_1 > 0, c_2 > 0$ sabitləri ε kiçik parametrindən asılı deyillər.

Bu işdə alınan nəticələri aşağıdakı teorem şəklində ümumiləşdirmək olar.

Teorem. Fərz edək ki, $f(x, y)$ funksiyası Ω oblastında $2n+2$ tərtib kəsilməyən törəmələrə malikdir və (11) şərtini ödəyir ($y \rightarrow \pm 1$ şərtində). Onda (1),(2) sərhəd məsələsinin həlinin kiçik papametrə nəzərən asimptotik ayrılışı (19) şəklindədir. Bu ayrılışdakı W_i funksiyaları birinci iterasiya prosesində təyin olunurlar, V_j funksiyaları sərhəd zolaq tipli funksiyalar olub ikinci iterasiya prosesində təyin olunurlar, $\varepsilon^{n+1} z$ - qalıq həddidir və z funksiyası üçün (22) qiymətləndirilməsi doğrudur.

ƏDƏBİYYAT

1. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. Матем. Сборник, 1948, вып.22(64), с. 193-204.
2. Тихонов А.Н. О системах дифференциальных уравнений содержащих параметры. Матем. Сборник, 1950, вып 27(69), с. 147-156.
3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи мат. наук, 1957, т.12, вып. 5(77).
4. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамопряженных дифференциальных уравнений. Успехи мат. наук. 1960, т.15, вып. 3(93), с. 3-80.
5. Səbzəliyev M.M., Səbzəliyeva İ.M. Klassik tiplərə aid olmayan sinqulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklər nəzəriyyəsinə giriş. Bakı, "ELM" nəşriyyatı, 2018, 210 səh.
6. Сабзалиев М.М. Об асимптотике решения краевой задачи для квазилинейного эллиптического уравнения. Докл. АН. СССР, 1985, т.280, №3, стр. 549-552.
7. Sabzaliev M.M. The asymptotic form of the solution of boundary value problem for quasilinear elliptic equation in the rectangular domain. Transactions of NAS of Azerbaijan, ISS math., mech., 2005, V.XXV, № 7, pp.107-118.
8. Сабзалиев М.М. Об одной краевой задаче для квазилинейного эллиптического уравнения в бесконечной полосе. Докл. НАН Азербайджана, 2009, T.LXV, № 50, стр. 3-8.
9. Sabzaliev M.M. On a boundary value problem for singularly perturbed quasilinear elliptic equation in curvilinear trapezoid. Transaction of NAS of Azerbaijan, iss. Math., mech., 2009, V.XXIX, № 4, pp.135-146.
10. Сабзалиев М.М. Асимптотика решения краевой задачи для квазилинейного эллиптического уравнения в криволинейной трапеции. Доклады Российск. АН, 2012, т.444, №46 стр.1-4.
11. Sabzaliev M.M., Sabzalieva I.M. On asymptotics of the solution of boundary value problem for quasilinear elliptic equation in curvilinear trapezoid. Proceedings of the 6th international conference on control and optimization with industrial applications Baku, 2018, V.I., Jule 11-13, pp.318-320.
12. Səbzəliyev M.M., İbrahimxəlilli E.R. Bir tərtibli adi diferensial tənliyə cirləşən iki tərtibli elliptik tənlik üçün dairədə qoyulmuş sərhəd məsələsinin həllinin asimptotikası. Bakı Biznes Universiteti, Beynəlxalq elmi-praktiki konfransın materialları, Bakı, 25 noyabr, 2020, s.248-253.

УДК 517.977.56

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ДВУХЭТАПНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Т.Ф. МАМЕДОВА

Институт Систем Управления НАН Азербайджана

mammadovaturkan1@gmail.com

АННОТАЦИЯ

В работе изучается одна линейная дискретная двухпараметрическая задача оптимального управления. Доказано необходимое и достаточное условие оптимальности типа принципа максимума.

Ключевые слова: двухэтапная задача оптимального управления, необходимое и достаточное условие оптимальности, разностное уравнение Вольтерра.

NECESSARY AND SUFFICIENT OPTIMALITY CONDITION IN ONE TWO-STAGE DISCRETE TWO-PARAMETER OPTIMAL CONTROL PROBLEM

ABSTRACT

The paper studies one linear two-parameter discrete optimal control problem. A necessary and sufficient optimality condition maximum principle type is proved.

Keywords: two-stage optimal control problem, necessary and sufficient optimality condition, Volterra difference equation.

BİR İKİMƏRHƏLƏLİ İKİPARAMETRLİ DİSKRET OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ VƏ KAFİ ŞƏRT XÜLASƏ

Məqalədə bir ikimərhələli ikiparametrlili diskret optimal idarəetmə məsələsi öyrənilmişdir. Optimallıq üçün zəruri və kafi şərt isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: iki mərhələli optimal idarəetmə problemi, zəruri və kifayət qədər optimal vəziyyət, Volterra fərq tənliyi.

Введение. В работах [1-4] и др. получены различные необходимые условия оптимальности типа дискретного принципа максимума, а в [5-8] установлены достаточные условия оптимальности типа условий Кротова [6] для различных задач оптимального управления дискретными системами. В предлагаемой работе рассматривается одна ступенчатая (двухэтапная) задача оптимального управления, описываемая различными двумерными разностными уравнениями в различных фазовых пространствах. С помощью одного варианта метода приращений доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в форме дискретного принципа максимума.

Постановка задачи. Пусть $U \subset R^r$ и $V \subset R^q$ заданные непустые, ограниченные множества, $D_1 = \{(t, x): t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1, x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\}$, $D_2 = \{(t, x): t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2 - 1, x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1\}$ – заданные дискретные прямоугольники.

Предположим, что дискретный двухэтапный процесс описывается следующими краевыми задачами

$$z(t+1, x+1) = A_1(t, x)z(t, x) + B_1(t, x)z(t+1, x) + C_1(t, x)z(t, x+1) + f_1(t, x, u(t, x)), (t, x) \in D_1, (1)$$

$$z(t_0, x) = a(x), x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, (2)$$

$$z(t, x_0) = b_1(t), t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1,$$

$$a(x_0) = b_1(t_0),$$

$$y(t+1, x+1) = A_2(t, x)y(t, x) + B_2(t, x)y(t+1, x) + C_2(t, x)y(t, x+1) + \sum_{\tau=t_1}^t \sum_{s=x_0}^x K(t, x, \tau, s)y(\tau, s) + \sum_{\tau=t_1}^t \sum_{s=x_0}^x f_2(t, x, \tau, s, v(\tau, s)), (t, x) \in D_2, (3)$$

$$y(t_1, x) = G(x)z(t_1, x), (4)$$

$$y(t, x_0) = b_2(t),$$

$$G(x_0)z(t_1, x_0) = b_2(t_1).$$

Здесь $A_1(t, x), B_1(t, x), C_1(t, x)$ -заданные $(n \times n)$ дискретные матричные функции, $f_1(t, x, u)$ -заданная n -мерная непрерывная по u при всех (t, x) вектор-функция, $a(x), b_1(t)$ - заданные n -мерные дискретные вектор-функции, $A_2(t, x), B_2(t, x), C_2(t, x)$ - заданные $(m \times m)$ дискретные матричные функции, $f_2(t, x, \tau, s, v)$ - заданная m -мерная непрерывная по v при всех (t, x, τ, s) вектор-функция, $b_2(t)$ - заданная m -мерная дискретная вектор-функция, $G(x)$ - заданная $(m \times n)$ дискретная матричная функция, $u(t, x)$ - r -мерная, $v(t, x)$ - q -мерная дискретные управляющие вектор-функции, удовлетворяющие ограничениям

$$u(t, x) \in U \subset R^r, (t, x) \in D_1, (5)$$

$$v(t, x) \in V \subset R^q, (t, x) \in D_2. (6)$$

Пару $(u(t, x), v(t, x))$, управляющих функций с вышеприведенными свойствами, назовем допустимым управлением.

Рассмотрим задачу нахождения минимального значения функционала

$$J(u, v) = c'z(t_1, x_1) + d'y(t_2, x_1), (7)$$

при ограничениях (1)-(6).

Здесь c и d - заданные n и m -мерные соответственно, постоянные векторы, а штрих (') означает операцию транспонирования.

Допустимое управление $(u(t, x), v(t, x))$ доставляющее минимум функционалу (7), при ограничениях (1)-(6), назовем оптимальным управлением.

Формула приращения функционала качества. Построим формулу приращения функционала качества. Пусть $(u^0(t, x), v^0(t, x))$ фиксированное допустимое управление, $(\bar{u}(t, x) = u^0(t, x) + \Delta u(t, x), \bar{v}(t, x) = v^0(t, x) + \Delta v(t, x))$ произвольное допустимое управление, а $(z^0(t, x), y^0(t, x)), (\bar{z}(t, x) = z^0(t, x) + \Delta z(t, x), \bar{y}(t, x) = y^0(t, x) + \Delta y(t, x))$ соответствующие им решения краевой задачи (1)-(2), (3)-(4).

Тогда ясно, что $(\Delta z(t, x), \Delta y(t, x))$ будет решением задачи:

$$\Delta z(t+1, x+1) = A_1(t, x)\Delta z(t, x) + B_1(t, x)\Delta z(t+1, x) + C_1(t, x)\Delta z(t, x+1) + (f_1(t, x, \bar{u}(t, x)) - f_1(t, x, u(t, x))), (8)$$

$$\Delta z(t_0, x) = 0, (9)$$

$$\Delta z(t, x_0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta y(t+1, x+1) = & A_2(t, x)\Delta y(t, x) + B_2(t, x)\Delta y(t+1, x) + C_2(t, x)\Delta y(t, x+1) + \\ & + \sum_{\tau=t_1}^t \sum_{s=x_0}^x K(t, x, \tau, s)\Delta y(\tau, s) + \sum_{\tau=t_1}^t \sum_{s=x_0}^x \left(f_2(t, x, \tau, s, \bar{v}(\tau, s)) - f_2(t, x, \tau, s, v(\tau, s)) \right), \end{aligned} (10)$$

$$\Delta y(t_1, x) = G(x)\Delta z(t_1, x), (11)$$

$$\Delta y(t, x_0) = 0.$$

Предположим, что $p^0(t, x), q^0(t, x)$ пока произвольные m -мерные соответственные дискретные вектор-функции. Из (8) и (10) получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t, x)\Delta z(t+1, x+1) = & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t, x)[A_1(t, x)\Delta z(t, x) + B_1(t, x)\Delta z(t+1, x) + C_1(t, x)\Delta z(t, x+1) + \\ & + [f(t, x, \tau, s, \bar{z}(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) - f(t, x, \tau, s, z^0(\tau, s), u^0(\tau, s))]]], \end{aligned} (12)$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t, x)\Delta y(t+1, x+1) = & \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t, x)[A_2(t, x)\Delta y(t, x) + B_2(t, x)\Delta y(t+1, x) + C_2(t, x)\Delta y(t, x+1) + \\ & + \sum_{\tau=t_1}^t \sum_{s=x_0}^x \left(K(t, x, \tau, s)\Delta y(\tau, s) + f_2(t, x, \tau, s, \bar{v}(\tau, s)) - f_2(t, x, \tau, s, v(\tau, s)) \right)]]. \end{aligned} (13)$$

Займемся преобразованием отдельных слагаемых в тождествах (12), (13). Сделав замену переменных $t+1 = \alpha, x+1 = \beta$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t, x)\Delta z(t+1, x+1) = & \sum_{t=t_0+1}^{t_1} \sum_{x=x_0+1}^{x_1} p^{0'}(t-1, x-1)\Delta z(t, x) = \\ = & \sum_{x=x_0+1}^{x_1} p^{0'}(t_1-1, x-1)\Delta z(t_1, x) - \sum_{x=x_0+1}^{x_1} p^{0'}(t_0-1, x-1)\Delta z(t_0, x) + \\ & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0+1}^{x_1-1} p^{0'}(t-1, x-1)\Delta z(t, x) = p^{0'}(t_1-1, x_1-1)\Delta z(t_1, x_1) - \\ & - p^{0'}(t_1-1, x_0-1)\Delta z(t_1, x_0) + \sum_{x=x_0+1}^{x_1-1} p^{0'}(t_1-1, x-1)\Delta z(t_1, x) - \\ & - p^{0'}(t_0-1, x_1-1)\Delta z(t_0, x_1) + p^{0'}(t_0-1, x_0-1)\Delta z(t_0, x_0) - \\ & - \sum_{x=x_0+1}^{x_1-1} p^{0'}(t_0-1, x-1)\Delta z(t_0, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} p^{0'}(t-1, x_1-1)\Delta z(t, x_1) - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} p^{0'}(t-1, x_0-1)\Delta z(t, x_0) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t-1, x-1)\Delta z(t, x) = \\ = & p^{0'}(t_1-1, x_0-1)\Delta z(t_1, x_0) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t_1-1, x-1)\Delta z(t_1, x) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} p^{0'}(t-1, x_1-1) \Delta z(t, x_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t-1, x-1) \Delta z(t, x), \\
 & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t, x) B_1(t, x) \Delta z(t+1, x) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t-1, x) B_1(t-1, x) \Delta z(t, x) = \\
 & = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t_1-1, x) B_1(t_1-1, x) \Delta z(t_1, x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t_0-1, x) B_1(t_0-1, x) \Delta z(t_0, x) + \\
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t-1, x-1) B_1(t-1, x) \Delta z(t, x) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t_1-1, x-1) B_1(t_1-1, x) \Delta z(t_1, x) + \\
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t-1, x-1) B_1(t-1, x) \Delta z(t, x), \\
 & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t, x) C_1(t, x) \Delta z(t, x+1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0+1}^{x_1-1} p^{0'}(t, x-1) C_1(t, x-1) \Delta z(t, x) = \\
 & = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} p^{0'}(t, x_1-1) C_1(t, x_1-1) \Delta z(t, x_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t, x-1) C_1(t, x-1) \Delta z(t, x).
 \end{aligned}$$

Далее аналогично доказывается

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t, x) \Delta y(t+1, x+1) = \sum_{t=t_1+1}^{t_2} \sum_{x=x_0+1}^{x_1} q^{0'}(t-1, x-1) \Delta y(t, x) = \\
 & = \sum_{x=x_0+1}^{x_1-1} q^{0'}(t_2-1, x-1) \Delta y(t_2, x) - \sum_{x=x_0+1}^{x_1-1} q^{0'}(t_1-1, x-1) \Delta y(t_1, x) + \\
 & + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0+1}^{x_1-1} q^{0'}(t-1, x-1) \Delta y(t, x) = q^{0'}(t_2-1, x_1-1) \Delta y(t_2, x_1) - \\
 & - q^{0'}(t_2-1, x_0-1) \Delta y(t_2, x_0) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_2-1, x-1) \Delta y(t_2, x) - \\
 & - q^{0'}(t_1-1, x_1-1) \Delta y(t_1, x_1) + q^{0'}(t_1-1, x_0-1) \Delta y(t_1, x_0) - \\
 & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_1-1, x-1) \Delta y(t_1, x) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} q^{0'}(t-1, x_1-1) \Delta y(t, x_1) - \\
 & - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} q^{0'}(t-1, x_0-1) \Delta y(t, x_0) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t-1, x-1) \Delta y(t, x) = \\
 & = q^{0'}(t_2-1, x_1-1) \Delta y(t_2, x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_2-1, x-1) \Delta y(t_2, x) - \\
 & - q^{0'}(t_1-1, x_1-1) \Delta y(t_1, x_1) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_1-1, x-1) \Delta y(t_1, x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} q^{0'}(t-1, x_1-1) \Delta y(t, x_1) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t-1, x-1) \Delta y(t, x), \\
& \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t, x) B_2(t, x) \Delta y(t+1, x) = \\
& = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_2-1, x) B_2(t_2-1, x) \Delta y(t_2, x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_1-1, x) B_2(t_1-1, x) \Delta y(t_1, x) + \\
& + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t-1, x) B_2(t-1, x) \Delta y(t, x), \\
& \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t, x) C_2(t, x) \Delta y(t, x+1) = \\
& = \sum_{t=t_1}^{t_2-1} q^{0'}(t, x_1-1) C_2(t, x_1-1) \Delta y(t, x_1) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t, x-1) C_2(t, x-1) \Delta y(t, x).
\end{aligned}$$

Используя доказанные тождества, с учетом произвольности вектор-функций $p^0(t, x)$ и $q^0(t, x)$ запишем формулу для приращения функционала качества принимая во внимание (5).

Имеем

$$\begin{aligned}
& \Delta J(u, v) = c' \Delta z(t_1, x_1) + d' \Delta y(t_2, x_1) + \\
& + p^{0'}(t_1-1, x_1-1) \Delta z(t_1, x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t_1-1, x-1) \Delta z(t_1, x) + \\
& + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} p^{0'}(t-1, x_1-1) \Delta z(t, x_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t-1, x-1) \Delta z(t, x) - (14) \\
& - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} p^{0'}(t, x) A_1(t, x) \Delta z(t, x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t_1-1, x) B_1(t_1-1, x) \Delta z(t_1, x) + \\
& + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t-1, x) B_1(t-1, x) \Delta z(t, x) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} p^{0'}(t, x_1-1) C_1(t, x_1-1) \Delta z(t, x_1) + \\
& + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t, x-1) C_1(t, x-1) \Delta z(t, x) - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0+1}^{x_1-1} p^{0'}(t, x-1) (f_1(t, x, \bar{u}(t, x)) - f_1(t, x, u^0(t, x))) + \\
& + \sum_{t=t_1+1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0+1}^{x_1-1} q^{0'}(t-1, x-1) \Delta y(t, x) + q^{0'}(t_2-1, x_1-1) \Delta y(t_2, x_1) + \\
& + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_2-1, x-1) \Delta y(t_2, x) - q^{0'}(t_1-1, x_1-1) \Delta y(t_1, x_1) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} q^{0'}(t-1, x_1-1) \Delta y(t, x_1) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t, x) A_2(t, x) \Delta y(t, x) - \\
 & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_2-1, x) B_2(t_2-1, x) \Delta y(t_2, x) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_1-1, x) B_2(t_1-1, x) \Delta y(t_1, x) - \\
 & - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t-1, x) B_2(t-1, x) \Delta y(t, x) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} q^{0'}(t, x_1-1) C_2(t, x_1-1) \Delta y(t, x_1) - \\
 & + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t, x-1) C_2(t, x-1) \Delta y(t, x) - \\
 & - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left(\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(\tau, s) K(\tau, s, t, x) \Delta y(t, x) \right) - \\
 & - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left(\sum_{\tau=t}^{t_2-1} \sum_{s=x}^{x_1-1} q^{0'}(\tau, s) \left(f_2(\tau, s, t, x, \bar{v}(t, x)) - f_2(\tau, s, t, x, v^0(t, x)) \right) \right) \Bigg).
 \end{aligned}$$

Введем аналог функции Гамильтона-Понтрягина следующим образом

$$\begin{aligned}
 H(t, x, u, p^0) &= p^{0'} f_1(t, x, u), \\
 M(t, x, v, q^0) &= \sum_{\tau=t}^{t_2} \sum_{s=x}^{x_1} q^{0'}(\tau, s) g(\tau, s, t, x, v).
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание тождества введенные обозначения и краевые условия (2)-(4), а также группируя подобные члены формула приращения (14) функционала качества может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
 \Delta J(u, v) &= (c + p^0(t_1-1, x_1-1) - G'(x_1) q^0(t_1-1, x_1-1))' \Delta z(t_1, x_1) + \\
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (p^0(t-1, x-1) - A_1'(t, x) p^0(t, x) - B_1'(t-1, x) p^0(t-1, x) - \\
 & - C_1'(t, x-1) p^0(t, x-1))' \Delta z(t, x) + (q^0(t_2-1, x_1-1) + d) \Delta y(t_2, x_1) + \\
 & + \sum_{t=t_1+1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0+1}^{x_1-1} (q^0(t-1, x-1) - A_2'(t, x) q^0(t, x) - B_2'(t-1, x) q^0(t-1, x) - \\
 & - C_2'(t, x-1) q^0(t, x-1) - \sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} K'(\tau, s, t, x) q^0(\tau, s))' \Delta y(t, x) + (15) \\
 & + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t_1-1, x-1) \Delta z(t_1, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} p^{0'}(t-1, x_1-1) \Delta z(t, x_1) - \\
 & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t_1-1, x) B_1(t_1-1, x) \Delta z(t_1, x) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} p^{0'}(t, x_1-1) C_1(t, x_1-1) \Delta z(t, x_1) + \\
 & + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_2-1, x-1) \Delta y(t_2, x) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_1-1, x-1) G(x_1) \Delta z(t_1, x) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} q^{0'}(t-1, x_1-1) \Delta y(t, x_1) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_2-1, x) B_2(t_2-1, x) \Delta y(t_2, x) - \\
& + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_1-1, x) B_2(t_1-1, x) G(x) \Delta z(t_1, x) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} q^{0'}(t, x_1-1) C_2(t, x_1-1) \Delta y(t, x_1) - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left(H(t, x, \bar{u}(t, x), p^0(t, x)) - H(t, x, u^0(t, x), p^0(t, x)) \right) - \\
& - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left(M(t, x, \bar{v}(t, x), q^0(t, x)) - M(t, x, v^0(t, x), q^0(t, x)) \right).
\end{aligned}$$

Предположим, что вектор-функций $p^0(t, x)$ и $q^0(t, x)$ удовлетворяют соотношениям

$$p^0(t-1, x-1) = A'_1(t, x) p^0(t, x) + B'_1(t-1, x) p^0(t-1, x) + C'_1(t, x-1) p^0(t, x-1), \quad (16)$$

$$p^0(t_1-1, x_1-1) = -c + G'(x_1) q^0(t_1-1, x_1-1),$$

$$p^0(t_1-1, x-1) = B'_1(t_1-1, x) p^0(t_1-1, x) - G'(x_1) q^0(t_1, x-1) - \\ - G'(x) B'_2(t_1-1, x) q^0(t_1, x-1), \quad (17)$$

$$p^0(t-1, x_1-1) = C'_1(t, x_1-1) p^0(t, x_1-1),$$

$$q^0(t-1, x-1) = A'_2(t, x) q^0(t, x) + B'_2(t-1, x) q^0(t-1, x) + C'_2(t, x-1) q^0(t, x-1), \quad (18)$$

$$q^0(t_2-1, x_1-1) = -d,$$

$$q^0(t_2-1, x-1) = B'_2(t_2-1, x) q^0(t_2-1, x),$$

$$q^0(t-1, x_1-1) = -C'_2(t, x_1-1) q^0(t, x_1-1). \quad (19)$$

Как видно, уравнения (16), (18) являются векторными двумерными разностными уравнениями. По аналогии с работами [2,4] и др. задачи (16)-(17), (18)-(19) назовем сопряженными системами для рассматриваемой в работе задачи (1)-(7).

Таким образом получим, что если $(p^0(t, x), q^0(t, x))$ является решением сопряженной задачи (16)-(19), то формула приращения (15) функционала качества имеет вид

$$\begin{aligned}
\Delta J(u^0, v^0) = & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left(H(t, x, \bar{u}(t, x), p^0(t, x)) - H(t, x, u^0(t, x), p^0(t, x)) \right) - \\
& - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left(M(t, x, \bar{v}(t, x), q^0(t, x)) - M(t, x, v^0(t, x), q^0(t, x)) \right).
\end{aligned}$$

Полученная формула приращения позволяет сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие оптимальности в форме дискретного принципа максимума Понтрягина.

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $(u^0(t), v^0(t))$ в задаче (1)-(7) необходимо и достаточно, чтобы условия

$$\max_{u \in U} H(\theta, \xi, u, p^0(\theta, \xi)) = H(\theta, \xi, u^0(\theta, \xi), p^0(\theta, \xi)),$$

$$\max_{v \in V} M(\theta, \xi, v, q^0(\theta, \xi)) = M(\theta, \xi, v^0(\theta, \xi), q^0(\theta, \xi))$$

выполнялись для всех $(\theta, \xi) \in D_1, (\theta, \xi) \in D_2$ соответственно.

Как видно, специфика рассматриваемой задачи позволяет доказать необходимое и достаточное условие оптимальности в форме дискретного принципа максимума без предположения о выпуклости множеств допустимых скоростей.

Заметим, что аналогичный результат можно получить и случай нелинейного, гладкого и выпуклого функционала качества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев О.В., Кириллова Ф.М., Об оптимальных процессах двухпараметрических дискретных системах // Докл. АН СССР, 1967, т.175, №1, с. 17-19.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности для дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1969, №12, с. 39-47.
3. Гороховик С.Я. Необходимые условия оптимальности особых управлений в дискретных системах с терминальными ограничениями // Изв. АНБССР, сер. физ.-мат. наук, 1985, №3, с. 35-40.
4. Мансимов К.Б. Оптимизация одного класса дискретных двухпараметрических систем // Дифференц. уравнения. 1991, №2, с. 359-361.
5. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Н. Наука, 1987, 226 с.
6. Кротов В.Ф. и др. Основы оптимального управления. М. Высшая школа. 1990, 270 с.
7. Мансимов К.Б. Достаточные условия оптимальности типа условий Кротова для дискретных двухпараметрических систем // Автоматика и телемеханика. 1985, №8, с. 15-20.
8. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М Наука, 1973, 448 с.

UDC 517.956

THE DIRICHLET PROBLEM FOR OF SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

Sh. Yu. SALMANOVA

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan

Baku / AZERBAIJAN

shehla.shukurova@mail.ru

ABSTRACT

The goal of the paper is to investigate a strong solvability of the Dirichlet problem for a class of semilinear elliptic equations of the non-divergent form of the second order, when the leading coefficients are discontinuous and satisfy Cordes's condition and a Charatheodory function $g(x, u)$ satisfies the growth condition. For this problem we get the existence solution in $W_2^2(\Omega)$ Sobolev spaces whenever the norm $\|f\|_{L_2(\Omega)}$ of the right hand of this equation is sufficiently small. In the proof of this theorem we apply Shauder's theorem on a continuous into mappings of a convex and compact set in a Banach space.

Keywords: semilinear elliptic equation, Cordes's condition, Shauder's principle.

YARIMXƏTTİ İKİNCİ TƏRTİB ELLİPTİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN DİRİXLƏ MƏSƏLƏSİ

XÜLASƏ

Məqalənin məqsədi baş hissə əmsallar kəsilməz olduqda və Kordes şərtini ödədikdə və Karateodori funksiyası artım şərtini ödədikdə, bir sinif ikinci tərtib qeyri-divergent strukturlu yarım xətti elliptik tənliklər üçün Dirixle məsələsinin güclü həllinin varlığının araşdırılmasıdır. Bu məsələ üçün, verilən tənliyin sağ tərəfinin norması kifayət qədər kiçik olduqda, Sobolev fəzalarında həllin varlığı isbat olunmuşdur. Bu teoremin isbatında Banax fəzasında qapalı və kompakt çoxluğu özünə kəsilməz inikas etdirən Şauder teoremindən istifadə edilir.

Açar sözlər: yarım xətti elliptik tənlik, Kordes şərti, Şauder prinsipi.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

АННОТАЦИЯ

Целью настоящей статьи является исследование сильной разрешимости задачи Дирихле для одного класса полулинейных эллиптических уравнений не дивергентной формы второго порядка, когда старшие коэффициенты разрывны и удовлетворяют условию Кордеса, а функция Каратеодори удовлетворяет условию роста. Для этой задачи мы доказываем существование решения в пространствах Соболева, когда норма правой части этого уравнения достаточно мала. При доказательстве этой теоремы мы применяем теорему Шаудера о непрерывном отображении выпуклого и компактного множества в банаховом пространстве.

Ключевые слова: полулинейное эллиптическое уравнение, условие Кордеса, принцип Шаудера.

Let E_n be n -dimensional Euclidean space of the points $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ and Ω be a bounded domain in E_n with boundary $\partial\Omega$ of the class C^2 . We consider in Ω the following Dirichlet problem:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + g(x, u) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

It is assumed that the coefficients $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ of the operator $L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ are bounded measurable functions satisfying the conditions

$$\gamma |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \gamma^{-1} |\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in E_n, \quad \gamma \in (0, 1), \quad (3)$$

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2(x)}{\left(\sum_{i=1}^n a_{ii}(x) \right)^2} \leq \frac{1}{n-1} - \delta \quad (4)$$

where $\delta \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ is some number and $g(x, u) : \Omega \times E_1 \rightarrow E_1$ is a Caratheodory function, measurable with respect to $x \in \Omega$ and for almost all $x \in \Omega$ continuous with respect to $u \in E_1$ and in addition to this, satisfying the following growth condition:

$$|g(x, u)| \leq b_0(x) |u|^q, \quad b_0 > 0, b_0 \in L_s(\Omega), \quad s > 2 \quad (5)$$

Condition (4) is called Cordes's condition. We understand it in the following sense: the domain Ω can be covered by a finite number of domains Ω_i so that in every Ω_i there exist a non-degenerate linear transformation of space, under which the equation coefficients satisfy condition (4).

We denote by $\dot{W}_2^2(\Omega)$ the closure of the class of functions $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ with respect to the norm

$$\|u\|_{\dot{W}_2^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \left(u^2 + \sum_{i=1}^n u_i^2 + \sum_{i,j=1}^n u_{ij}^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Let u_i and u_{ij} denote the derivatives u_{x_i} and $u_{x_i x_j}$ respectively $i, j = 1, 2, \dots, n$. The conjugate number is denoted by p' i.e., $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$.

The notation $C_i(\dots)$ means that the positive constant C_i depends on the content of parameters included in parenthesis (note, the writing $C_i(\Omega)$ reads that this constant depends on smoothness of Ω).

A function $u(x) \in \dot{W}_2^2(\Omega)$ is called a strong solution of problem (1)-(2) if it satisfies equation (1) a.e. in Ω .

Let us recall some known results directly related to the subject. In the case of linear equations the questions of strong solvability of elliptic and parabolic equations with discontinuous leading coefficients satisfying the Cordes condition were considered in [1-3], where the problem of deriving the estimate

$$\int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx \leq C_1(n, \gamma, \delta) \int_{\Omega} Lu \cdot \Delta u dx \quad (6)$$

is the corner-stone of the investigation. From the examples in [4, p. 48], it follows that if the coefficients of operator L are discontinuous and the Cordes condition is not fulfilled, then the equation $Lu = f$ is unsolvable in $\dot{W}_p^2(\Omega)$ for any $p > 1$. For the further results on strong solvability of linear elliptic equations with discontinuous coefficients in $\dot{W}_p^2(\Omega)$ ($p > 1$) we refer to the monographs [4,5]. For such equations with VMO class coefficients the questions of $\dot{W}_p^2(\Omega)$ strong solvability for $p > 1$ were considered in [6]. We cite [1, 7, 8] on proper studies in nonlinear parabolic equations with discontinuous coefficients.

Note that, in the study of semilinear equations (1.1) with small nonlinearity ($0 < q < 1$) there is not a need for a norm condition on the right hand side function of type (7) below (see, [9]).

In different from semilinear equations with regular coefficients, the case of discontinuous coefficients was not considered before on the subject of strong solvability.

Precisely, the aim of this paper is to prove a strong solvability of Dirichlet problem for a class of semilinear elliptic equations (1) in Sobolev's spaces $\dot{W}_2^2(\Omega)$ when the leading coefficients are discontinuous and satisfy Cordes's condition, and the function $f(x)$ has a sufficiently small $L_2(\Omega)$ (Cf.[10]) norm.

Theorem 1. Let $n > 4$, $s > 2$, $1 \leq q < \frac{n(s-2)}{(n-4)s}$ and conditions (3)-(5) be satisfied, $\partial\Omega \in C^2$. Then there exists a sufficiently small positive constant $C_2 = C_2(n, \gamma, \delta, q, b_0, \Omega)$ such that problem (1)-(2) has at least one solution from $\dot{W}_2^2(\Omega)$ for any $f(x) \in L_2(\Omega)$ satisfying

$$\|f\| \leq C_7 (mes_n \Omega)^{-\left(\frac{n(s-2)-s(n-4)q}{2ns(q-1)}\right)}. \quad (7)$$

Proof. We apply Schauder's theorem on continuous into mappings of a convex and compact set in a Banach space (see, e.g. [5, p. 257]).

Take $L_{2q}(\Omega)$ as a Banach space. In this space we define the set of functions

$$V_2 = \left\{ u \in \dot{W}_2^2(\Omega) \mid \|u\|_{\dot{W}_2^2(\Omega)} \leq K \right\},$$

where the number K will be chosen later. For every $u(x) \in L_{2qs/(s-2)}(\Omega)$, $f(x) \in L_2(\Omega)$ we denote by $v(x) \in \dot{W}_2^2(\Omega)$ the solution of the problem:

$$Lv + g(x, u) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (8)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0 \quad (9)$$

For any $u(x) \in V_2$, $f(x) \in L_2(\Omega)$ problem (8)-(9) is uniquely solvable in the space $\dot{W}_2^2(\Omega)$, since under our assumptions we come to the Dirichlet problem for the equation

$$Lv = F(x), \quad x \in \Omega, \quad (10)$$

where $F = f(x) - g(x, u) \in L_2(\Omega)$ (see [11]).

Indeed,

$$\|F\|_{L_2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} + \|g\|_{L_2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} + b_0 \|u\|_{L_{2qs/(s-2)}(\Omega)}^q.$$

$\|u\|_{L_{2qs/(s-2)}(\Omega)}^q$ is finite since the space $\dot{W}_2^s(\Omega)$ is continuously embedded into $L_{2qs/(s-2)}(\Omega)$ for $1 \leq q < \frac{n(s-2)}{(n-4)s}$, therefore $F \in L_2(\Omega)$ [5, see p. 154].

Denote by A the operator which transforms u to v in the problem (8), (9):

$$Au = v.$$

Let us show that the operator A is continuous in $L_{2qs/(s-2)}(\Omega)$.

Let $u_n \rightarrow u_0$ in $L_{2qs/(s-2)}(\Omega)$ as $n \rightarrow \infty$, where $u_n, u_0 \in L_{2qs/(s-2)}(\Omega)$ and $v_n = Au_n$; $v_0 = Au_0$. Then

$$\begin{aligned} Lv_n &= -g(x, u_n) + f(x), \\ Lv_0 &= -g(x, u_0) + f(x). \end{aligned} \quad (11)$$

We show that $v_n \rightarrow v_0$ in the norm of the space $L_{2qs/(s-2)}(\Omega)$. We have

$$L(v_n - v_0) = -(g(x, u_n) - g(x, u_0)). \quad (12)$$

Having multiplied both parts of equality (12) by $\Delta(v_n - v_0)$, we obtain:

$$L(v_n - v_0)\Delta(v_n - v_0) = -(g(x, u_n) - g(x, u_0))\Delta(v_n - v_0).$$

Hence, using estimate (6) and Holder's inequality, we obtain

$$\|\Delta(v_n - v_0)\|_{L_2(\Omega)} \leq C_3(n, \gamma, \delta) \|g_n - g_0\|_{L_2(\Omega)}. \quad (13)$$

where $g_n = g(x, u_n)$, $g_0 = g(x, u_0)$

Let us show that

$$\|g_n - g_0\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

From $u_m \rightarrow u$ in $L_{2qs/(s-2)}(\Omega)$ it follows that $u_{m_k} - u \rightarrow 0$ almost everywhere in Ω for some subsequence $\{u_{m_k}\}$. Since $u_{m_k} \rightarrow u$ is convergent in $L_{2qs/(s-2)}(\Omega)$, the sequence $\left\{ |u_{m_k}|^{2qs/(s-2)} \right\}$ is equi-integrable. Therefore the Caratheodory condition and the growth condition (5) imply the equi-continuity of the sequence $\left\{ |g_{m_k} - g_0|^2 \right\}$ and the convergence of $g_{m_k} - g_0 \rightarrow 0$ almost everywhere in Ω as $m_k \rightarrow \infty$. Then, applying Vitali's theorem, we obtain

$$\|g_{m_k} - g_0\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ for } m_k \rightarrow \infty. \quad (15)$$

The same reasoning also holds for the sequence $\{g_m - g_0\}$. Indeed, let

$\lim_{m_i \rightarrow \infty} \|g_{m_i} - g_0\|_{L_2(\Omega)} = \delta, \delta \neq 0$ for some subsequence $\{g_{m_i} - g_0\}$. Repeating the above arguments for this subsequence, we find that it has a subsequence for which (15) is fulfilled.

The obtained contradiction proves the convergence of $\|g_m - g_0\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ as $m \rightarrow \infty$.

Now taking (14) into account, from (13) we have

$$\|\Delta(v_n - v_0)\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

Applying the estimate

$$\|(v_n - v_0)\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C_3 \|\Delta(v_n - v_0)\|_{L_2(\Omega)},$$

we obtain

$$\|v_n - v_0\|_{W_2^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

By virtue of the embedding theorem $W_2^2(\Omega) \rightarrow L_{2qs/(s-2)}(\Omega)$ we have

$$\|v_n - v_0\|_{L_{2qs/(s-2)}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

The continuity of the operator A has been proved.

Let us prove that the set V_2 is convex and compact in $L_{2qs/(s-2)}(\Omega)$ and that the operator A transforms it to itself.

For $u_1, u_2 \in V_2$ and $v = tu_1 + (1-t)u_2$, $t \in [0,1]$, we have

$$\|v\|_{W_2^2(\Omega)} = \|tu_1 + (1-t)u_2\|_{W_2^2(\Omega)} \leq \|tu_1\|_{W_2^2(\Omega)} +$$

$$+ \|(1-t)u_2\|_{W_2^2(\Omega)} \leq tK + (1-t)K = K,$$

$$\|v\|_{W_2^2(\Omega)} = \|tu_1 + (1-t)u_2\|_{W_2^2(\Omega)} \leq t\|u_1\|_{W_2^2(\Omega)} + (1-t)\|u_2\|_{W_2^2(\Omega)} \leq tK + (1-t)K = K,$$

which means the convexity of V_2 .

The set $V_2 \subset L_{2qs/(s-2)}(\Omega)$ is compact by virtue of the theorem on compact embedding $W_2^2(\Omega) \rightarrow L_{2qs/(s-2)}(\Omega)$ whenever

$$1 \leq q < \frac{n(s-2)}{(n-4)s}. \quad (16)$$

Let us show that for a certain choice of K the operator A transforms V_2 to itself.

For the solution of the Dirichlet problem for equation (10) we have

$$\|v\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C_4(n, \gamma, \delta) \|F\|_{L_2(\Omega)} \leq C_4 (\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|g\|_{L_2(\Omega)}). \quad (17)$$

Furthermore,

$$\begin{aligned} \|g\|_{L_2(\Omega)} &\leq \left(\int_{\Omega} b_0^2 |u|^{2q} dx \right)^{1/2} \leq \|b_0\|_{L_s(\Omega)} \|u\|_{L_{2q/(s-2)}(\Omega)}^q \leq \|b_0\|_{L_s(\Omega)} (mes_n \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{s} - \frac{(n-4)q}{2n}} \left(\int_{\Omega} u^{\frac{2n}{n-4}} dx \right)^{\frac{(n-4)q}{2n}} \\ &\leq C_5(n, q) \|b_0\|_{L_s(\Omega)} (mes_n \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{s} - \frac{(n-4)q}{2n}} \|u\|_{W_2^2(\Omega)}^q. \end{aligned} \quad (18)$$

Here we have used the above-mentioned embedding theorem for (16).

Using the estimate (18) in (17), we obtain

$$\begin{aligned} \|v\|_{W_2^2(\Omega)} &\leq C_6 \left[\|b_0\|_{L_s(\Omega)} (mes_n \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{s} - \frac{(n-4)q}{2n}} \|u\|_{W_2^2(\Omega)}^q + \|f\|_{L_s(\Omega)} \right] \leq \\ &\leq C_6 \left[K^q \|b_0\|_{L_s(\Omega)} (mes_n \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{s} - \frac{(n-4)q}{2n}} + \|f\|_{L_s(\Omega)} \right], \end{aligned}$$

where $C_6 = C_6(n, \gamma, \delta, q, \Omega)$.

Let us assume that K satisfies the following estimate

$$\left[K^q \|b_0\|_{L_s(\Omega)} (mes_n \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{s} - \frac{(n-4)q}{2n}} + \|f\|_{L_s(\Omega)} \right] \leq K. \quad (19)$$

For such a number K to exist it is sufficient that

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} \leq C_7 (mes_n \Omega)^{\left(\frac{n(s-2)-s(n-4)q}{2ns(q-1)} \right)},$$

where $C_7 = C_7(n, \delta, \gamma, q, \Omega)$.

Indeed, if we introduce the notation

$$a = \|b_0\|_{L_s(\Omega)} (mes_n \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{s} - \frac{(n-4)q}{2n}}, \quad b = \|f\|_{L_2(\Omega)},$$

then inequality (19) reads

$$a K^q + b \leq K, \quad a K^q - K + b \leq 0, \quad K \succ 0. \quad (20)$$

The function $\psi(K) = a K^q - K$, $K \succ 0$, takes a minimal value for $K_0 = \left(\frac{1}{qa} \right)^{\frac{1}{q-1}}$.

Indeed, $\psi'(K) = a q K^{q-1} - 1$, then for $K_0^{q-1} = \frac{1}{qa}$ we have $\psi'(K_0) = 0$, $\psi''(K_0) \succ 0$. Therefore, for $b \leq \psi(K_0)$ inequality (20) is solvable with respect to K . Theorem 1 is proved.

In the case $1 \leq n \leq 4$ the following statement is true.

Theorem 2. Let $1 \leq q < \infty$ conditions (3)-(5) be satisfied and $1 \leq n \leq 4$ ($n = 4$), $\partial\Omega \in C^2$. Then there exists a sufficiently small positive constant $C_8 = C_8(n, \gamma, \delta, q, b_0, \Omega)$ ($C_9 = C_9(n, \gamma, \delta, q, b_0, \Omega)$) such that problem (1)-(2) has at least one solution from $\dot{W}_2^2(\Omega)$ for any $f(x) \in L_2(\Omega)$ satisfying

$$\|f\| \leq C_8 (mes_n \Omega)^{\left(\frac{n(s-2)-s(n-4)q}{2ns(q-1)} \right)} \left(\|f\| \leq C_9 (mes_n \Omega)^{\frac{(s-2)}{2s(q-1)}} \right).$$

In proving this theorem, as a Banach space we take the space $C(\overline{\Omega}) (L_{2q}(\Omega))$ and argue as above applying the theorem of compact embedding $W_2^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ ($W_2^2(\Omega) \subset L_{2q}(\Omega)$).

REFERENCES

1. Alkhutov Yu. A. , Mamedov I.T. The first boundary value problem for nondivergent parabolic equations of second order with discontinuous coefficients. Matem. Sb., 131(173), (1986), no. 4 (12), 477-500 (Russian).
2. Talenti G. Sopra una classe di equazione ellittiche a coefficienti misurabili. Ann. Mat.pura appl.,**69** (1965), 285-304.
3. Zhikov V.V. , Sirajaddinov M.M. On the G -compactness of a class of nondivergence elliptic operators of second order". Izv. USSR Akad Nauk,**1** (1982), no. 19, 27-40 .
4. Ladizhenskaya O.A., Uraltseva N.N., Linear and quasilinear equations of elliptic type. Nauka, Moscow, 1973, 576 p. (Russian).
5. Gilbarg D., Trudinger N. Elliptic differential equations with partial derivatives of second order. Nauka, Moscow, 1989, 463 p.
6. Vitanza C. A new contribution to the $W^{2,p}$ regularity for a class of elliptic second order equations with discontinuous coefficients. Le matematiche,**48** (1993), 287-296.
7. Wen G.C. Initial-mixed boundary value problems for parabolic equations of second order with measurable coefficients in a higher dimensional domain. Proceedings of the second ISAAC Congress**1** (2000), 185-192.
8. Wen G. ,Tain Mao-ying. Initial-oblique derivative problems for nonlinear parabolic equations with measurable coefficients . Comm in Nonlinear Sci. and Numer. Simu.**2** (1998), 109-113.
9. Dravek P. Kufner A., Nicolosi F. *Nonlinear elliptic equations (Singular and Degenerate Case.)*. University of west Bohemia in Pelsen,1996.
10. Mamedov F.I., Salmanova Sh.Yu. On strong solvability of the dirichlet problem for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients. Trans.Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.- Tech. Math. Sci. **27**, no 7 (2007), 117-124.
11. Ladizhenskaya O.A. The simple proof of solvability of basic boundary value problem and of problem on eigenvalues for linear equations. Vestnik LGU No11, 1955,p.23-29. (Russian).

ACKNOWLEDGMENT.

I express my deep gratitude to professor Farman Mammadov for useful advice and support in preparation of this paper.

УДК 517.9

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

МАМЕДОВА Т.Ф

Институт систем управления НАН Азербайджана

mammadovaturkan 1@gmail.com

АННОТАЦИЯ

Рассматривается краевая задача для системы двумерных разностных уравнений типа Вольтерра представляющий собой разностный аналог системы линейных гиперболических интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Используя дискретный аналог резольвенты линейного интегрального уравнения типа Вольтерра, найдено представление решения рассматриваемой краевой задачи.

Ключевые слова: разностное уравнение типа Вольтерра, резольвента, представление решения краевой задачи.

ON THE REPRESENTATION OF THE SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A DIFFERENT ANALOGUE OF A LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL HYPERBOLIC EQUATION OF VOLTERRA TYPE

ABSTRACT

We consider a boundary-value problem for a system of two-dimensional difference equations of Volterra type, which is a difference analogue of a system of linear hyperbolic integro-differential equations of Volterra type. Using a discrete analogue of the resolving of a linear integral equation of Volterra type. A representation of the solution of the considered boundary value problem is found.

Keywords: difference equation of Volterra type, resolution of the representation of the solution of a boundary value problem.

VOLTERA TIP XƏTTİ INTEQRO-DİFERENSIAL TƏNLIYIN FƏQR ANALOQU ÜÇÜN SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN GÖSTƏRİLİŞİ HAQQINDA

XÜLASƏ

Volterra tipli xətti hiperbolik integro-differensial tənliklər sisteminin fərq analoqu olan Volterra tipli iki ölçülü fərq tənlikləri sistemi üçün bir sərhəd məsələsinə baxılmışdır. Volterra tipli xətti integral tənliyin həllinin diskret analoqundan istifadə etməklə baxılan sərhəd məsələsinin həllinin göstərilişi tapılmışdır.

Açar sözlər: Volterra tipinin fərq tənliyi, rezolvent, sərhəd məsələsinin həllinin təqdimatı.

Введение. В работах [1-6] и др. рассмотрены различные классы одномерных и двумерных линейных неоднородных разностных уравнений. Для них с помощью матрицы Коши и матрицы Римана при различных предположениях получены ряд формул представления решений рассматриваемых задач.

В предлагаемой работе изучается дискретный аналог задачи Гурса для системы линейных неоднородных гиперболических интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Введя аналог резольвенты уравнения получено представление решения рассматриваемой краевой задачи с помощью аналога резольвенты уравнения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двумерную линейную неоднородную разностную систему уравнений типа Вольтерра

$$z(t+1, x+1) = A(t, x)z(t, x) + B(t, x)z(t+1, x) + C(t, x)z(t, x+1) + \\ + \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x [D(t, x, \tau, s)z(\tau, s) + f(t, x, \tau, s)], \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z(t_0, x) &= a(x), \\ z(t, x_0) &= b(t), \quad (2) \\ a(x_0) &= b(t_0) = a_0. \end{aligned}$$

Здесь $A(t, x), B(t, x), C(t, x), D(t, x, \tau, s)$ – заданные $(n \times n)$ дискретные ограниченные матричные функции, $f(t, x, \tau, s)$ – заданная n -мерная дискретная вектор-функция, $a(x), b(t)$ – заданные n -мерные дискретные вектор-функции, t_0, t_1, x_0, x_1 – заданные числа.

Как видно задача (1)-(2) является дискретным аналогом задачи Гурса.

Целью работы является нахождение представления решения линейной краевой задачи (1)-(2).

2. Представление решения. Обозначая через $R(m, l, t, x)$ пока произвольную матричную функцию, предположим, что $z(t, x)$ является решением краевой задачи (1)-(2).

Умножая обе части уравнения (1) слева на матричную функцию $R(m+1, l+1, t+1, x+1)$ и просуммировав обе части полученного соотношения по $t(x)$ от $t_0(x_0)$ до $m(l)(m \geq t_0, l \geq x_0)$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t+1, x+1)z(t+1, x+1) &= \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t+1, x+1)A(t, x)z(t, x) + \\ &+ \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t+1, x+1)B(t, x)z(t+1, x) + \quad (3) \\ &+ \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t+1, x+1)C(t, x)z(t, x+1) + \\ &+ \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t+1, x+1) \left[\sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x D(t, x, \tau, s)z(\tau, s) \right] + \\ &+ \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t+1, x+1) \left[\sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x f(t, x, \tau, s) \right]. \end{aligned}$$

Займемся преобразованием отдельных слагаемых в тождестве (3).

Используя замену переменных $\alpha = t+1, \beta = x+1$ получим

$$\sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t+1, x+1)z(t+1, x+1) = \sum_{t=t_0+1}^{m+1} \sum_{x=x_0+1}^{l+1} R(m+1, l+1, t, x)z(t, x) = \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{x=x_0+1}^{l+1} R(m+1, l+1, m+1, x)z(m+1, x) - \sum_{x=x_0+1}^{l+1} R(m+1, l+1, t_0, x)z(t_0, x) + \\
 &+ \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0+1}^{l+1} R(m+1, l+1, t, x)z(t, x) = R(m+1, l+1, m+1, l+1)z(m+1, l+1) - \\
 &- R(m+1, l+1, m+1, x_0)z(m+1, x_0) + \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, m+1, x)z(m+1, x) - \\
 &- R(m+1, l+1, t_0, l+1)z(t_0, l+1) + R(m+1, l+1, t_0, x_0)z(t_0, x_0) - \\
 &- \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t_0, x)z(t_0, x) + \sum_{t=t_0}^m R(m+1, l+1, t, l+1)z(t, l+1) - \\
 &- \sum_{t=t_0}^m R(m+1, l+1, t, x_0)z(t, x_0) + \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0+1}^{l+1} R(m+1, l+1, t, x)z(t, x).
 \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}
 &\sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t+1, x+1)B(t, x)z(t+1, x) = \sum_{t=t_0+1}^{m+1} \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t, x+1)B(t-1, x)z(t, x) = \\
 &= \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, m+1, x+1)B(m, x)z(m+1, x) - \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t_0, x+1)B(t_0-1, x)z(t_0, x) + \\
 &+ \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t, x+1)B(t-1, x)z(t, x), \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t+1, x+1)C(t, x)z(t, x+1) = \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0+1}^{l+1} R(m+1, l+1, t+1, x)C(t, x-1)z(t, x) = \\
 &= \sum_{t=t_0}^m R(m+1, l+1, t+1, l+1)C(t, l)z(t, l+1) - \sum_{t=t_0}^m R(m+1, l+1, t+1, x_0)C(t, x_0-1)z(t, x_0) + \\
 &+ \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t+1, x)C(t, x-1)z(t, x), \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t+1, x+1) \left[\sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x D(t, x, \tau, s)z(\tau, s) \right] = \\
 &= \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l \left[\sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^l R(m+1, l+1, \tau+1, s+1)D(\tau, s, t, x) \right] z(t, x), \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t+1, x+1) \left[\sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x f(t, x, \tau, s) \right] = \\
 &= \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l \left[\sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^l R(m+1, l+1, \tau+1, s+1)f(\tau, s, t, x) \right]. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Учитывая тождества (5)-(8) из (4) получим

$$\begin{aligned}
& R(m+1, l+1, m+1, l+1)z(m+1, l+1) - \\
& -R(m+1, l+1, m+1, x_0)z(m+1, x_0) + \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, m+1, x)z(m+1, x) - \\
& -R(m+1, l+1, t_0, l+1)z(t_0, l+1) + R(m+1, l+1, t_0, x_0)z(t_0, x_0) - \\
& - \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t_0, x)z(t_0, x) + \sum_{t=t_0}^m R(m+1, l+1, t, l+1)z(t, l+1) - \\
& - \sum_{t=t_0}^m R(m+1, l+1, t, x_0)z(t, x_0) + \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t, x)z(t, x) = \\
& = \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t+1, x+1)A(t, x)z(t, x) + \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, m+1, x+1)B(m, x)z(m+1, x) - \\
& - \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t_0, x+1)B(t_0-1, x)z(t_0, x) + \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t, x+1)B(t-1, x)z(t, x) + \\
& + \sum_{t=t_0}^m R(m+1, l+1, t+1, l+1)C(t, l)z(t, l+1) - \sum_{t=t_0}^m R(m+1, l+1, t+1, x_0)C(t, x_0-1)z(t, x_0) + \\
& + \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t+1, x)C(t, x-1)z(t, x) + \quad (9) \\
& + \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l \left[\sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^l R(m+1, l+1, \tau+1, s+1)D(\tau, s, t, x) \right] z(t, x) + \\
& + \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l \left[\sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^l R(m+1, l+1, \tau+1, s+1)f(\tau, s, t, x) \right].
\end{aligned}$$

Предположим, что матричная функция $R(m, l, t, x)$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned}
& R(m+1, l+1, t, x) = R(m+1, l+1, t+1, x+1)A(t, x) + \\
& + R(m+1, l+1, t, x+1)B(t-1, x) + R(m+1, l+1, t+1, x)C(t, x-1) + \\
& + \sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^l R(m+1, l+1, \tau+1, s+1)D(\tau, s, t, x), \quad (10) \\
& R(m+1, l+1, m+1, x) = R(m+1, l+1, m+1, x)B(m, x), \\
& R(m+1, l+1, t, l+1) = R(m+1, l+1, t+1, l+1)C(t, l), \\
& R(m+1, l+1, m+1, l+1) = E. \quad (11)
\end{aligned}$$

Тогда из тождеств (4)-(9) следует, что

$$\begin{aligned}
z(m+1, l+1) &= \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t_0, x)a(x) + \sum_{t=t_0}^m R(m+1, l+1, t, x_0)b(t) - \\
&- \sum_{x=x_0}^l R(m+1, l+1, t_0, x+1)B(t_0-1, x)a(x) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{t=t_0}^m R(m+1, l+1, t+1, x_0) C(t, x_0-1) b(t) + \\
 & + R(m+1, l+1, m+1, x_0) b(m+1) + R(m+1, l+1, t_0, l+1) a(l+1) + \\
 & + R(m+1, l+1, t_0, x_0) z(t_0, x_0) + \\
 & + \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^l \left[\sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^l R(m+1, l+1, \tau+1, s+1) f(\tau, s, t, x) \right].
 \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
 z(m, l) = & R(m, l, t_0, x_0) a_0 + \sum_{x=x_0}^{l-1} R(m, l, t_0, x) a(x) + \sum_{t=t_0}^{m-1} R(m, l, t, x_0) b(t) - \\
 & - \sum_{x=x_0}^{l-1} R(m, l, t_0, x+1) B(t_0-1, x) a(x) - \sum_{t=t_0}^{m-1} R(m, l, t+1, x_0) C(t, x_0-1) b(t) + \\
 & + R(m, l, m, x_0) b(m) + R(m, l, t_0, l) a(l) + \sum_{t=t_0}^{m-1} \sum_{x=x_0}^{l-1} \left[\sum_{\tau=t}^{m-1} \sum_{s=x}^{l-1} R(m, l, \tau+1, s+1) f(\tau, s, t, x) \right].
 \end{aligned}$$

Таким образом доказали, что

$$\begin{aligned}
 z(t, x) = & R(t, x, t_0, x_0) z(t_0, x_0) + \sum_{l=x_0}^x R(t, x, t_0, l) a(l) + \sum_{m=t_0}^t R(t, x, m, x_0) b(m) - \\
 & - \sum_{l=x_0}^{x-1} R(t, x, t_0, l+1) B(t_0-1, l) a(l) - \sum_{m=t_0}^{t-1} R(t, x, m, x_0) C(m, x_0-1) b(m) + \\
 & + \sum_{m=t_0}^{t-1} \sum_{l=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\tau=m}^{t-1} \sum_{s=l}^{x-1} R(t, x, \tau+1, s+1) f(\tau, s, m, l) \right].
 \end{aligned} \quad (12)$$

Теорема. При сделанных предположениях решение краевой задачи (1)-(2) представляется в виде (12), где матричная функция $R(m, l, t, x)$ является решением задачи (10)-(11).

Заметим, что получение представления рассматриваемой задачи в дальнейшем может быть успешно применен при исследовании различных задач оптимального управления, описываемые как линейными, так и нелинейными уравнениями типа (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмановский В.Б. Устойчивость дискретных уравнений Вольтерра // Докл. РАН. 1996, т. 349, № 5, с. 40-61.
2. Колмановский В.Б. Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2009, № 4, с. 41-50.
3. Choi S.K., Goo Y.H., Koo N.J. Boundedness of discrete Volterra systems // Korean Math. Soc. 2007, vol. 44, № 4, pp. 663-675.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Изд-во БГУ. Минск 1973 256 с.
5. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку изд-во Бакинского гос. ун-ва. 2013. 151 с.
6. Степанюк Н.Н. Некоторые задачи управляемости и наблюдаемости двухпараметрических дискретных систем // Дифференц. уравнения. 1976, № 5, с. 940-943.

УДК 517.977.56

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ПОПУЛЯЦИИ

А.И. АГАМАЛИЕВА

Бакинский Государственный Университет
 agamaliyeva88@gmail.com

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается одна задача оптимального управления динамикой популяции с многоточечным функционалом качества. При предположении открытости области управления доказаны необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Ключевые слова: динамика популяции, интегро-дифференциальное уравнение, уравнение Эйлера, условие Лежандра-Клебша.

THE FIRST AND SECOND ORDERS NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN ONE OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF POPULATION DYNAMICS

ABSTRACT

The article considers one problem of optimal control of population dynamics with a multi-point quality functional. Under the assumption that the control area is open, the necessary optimality conditions for the first and second orders are proved.

Key words: population dynamics, integro-differential equation, Euler equation, Legendre-Clebsch condition.

BİR POPULYASIYANIN DİNAMİKASI OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN BİRİNCİ VƏ İKİNCİ TƏRTİB ZƏRURİ ŞƏRTLƏR

XÜLASƏ

Məqalədə çox nöqtəli keyfiyyət funksionallı bir populyasiya dinamikasının optimal idarə edilməsi məsələsinə baxılır. İdarəetmə oblastının açıq olması fərziyyəsi daxilində optimallıq üçün birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: populyasiya dinamikası, integro-diferensial tənlik, Eyler tənliyi, Legendre-Klebsş şərt.

Введение. В работах [1-3] изучена одна задача оптимального управления динамикой популяции, описываемая системой интегро-дифференциальных уравнений и доказан аналог вариационного принципа максимума. В предлагаемой работе аналогичная задача рассматривается с более общим (многоточечным) функционалом качества. При помощи модифицированного варианта аналога метода приращений (см., напр., [4-6]) доказаны необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Постановка задачи. Пусть требуется найти минимальное значение функционала

$$J(u) = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(z(T_1, x), z(T_2, x), \dots, z(T_k, x)) dx + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Phi(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)) dx dt, \quad (1)$$

определенного на решениях интегро-дифференциального уравнения

$$z_t(t, x) = f(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)), \quad (2)$$

$$y(t, x) = \int_{x_0}^{x_1} g(t, x, s, z(t, s), u(t, s)) ds, \quad (3)$$

с начальным условием

$$z(t_0, x) = a(x), x \in [x_0, x_1]. \quad (4)$$

Здесь $f(t, x, z, y, u)$ ($g(t, x, s, z, u)$) – заданная $n(m)$ -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z, y, u) ((z, u)) до второго порядка включительно, $a(x)$ – заданная измеримая и ограниченная n -мерная вектор-функция, $\varphi(z_1, \dots, z_k)$, $(\Phi(t, x, z, y, u))$ – заданная скалярная функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по $(z_1, \dots, z_k)$ ((t, x, z, y, u)) до второго порядка включительно, $T_i, i = \overline{1, k}$ ($t_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_k \leq t_1$) – заданные точки, а $u = u(t, x)$ – r -мерная измеримая и ограниченная вектор-функция управляющих воздействий, удовлетворяющих ограничению

$$u(t, x) \in U \subset R^r, (t, x) \in D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1], \quad (5)$$

где U – заданное, непустое, ограниченное и открытое множество.

Такие управляющие функции назовем допустимыми.

Допустимое управление $u(t, x)$ доставляющее минимум функционалу (1), при ограничениях (2)-(5), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t, x), z(t, x), y(t, x))$ – оптимальным процессом.

Целью работы является вывод необходимых условий оптимальности в рассматриваемой задаче (1) –(5) при сделанных предположениях.

Вычисление вариации функционала. Пусть $(u(t, x), z(t, x))$ фиксированный, а $(\bar{u}(t, x) = u(t, x) + \Delta u(t, x), \bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x))$ произвольный – допустимые процессы. Запишем приращение функционала качества.

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\varphi(\bar{z}(T_1, x), \bar{z}(T_2, x), \dots, \bar{z}(T_k, x)) - \varphi(z(T_1, x), z(T_2, x), \dots, z(T_k, x)) \right) dx + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\Phi(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{y}(t, x), \bar{u}(t, x)) - \Phi(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)) \right) dx dt. \quad (6) \end{aligned}$$

При этом приращение $(\Delta z(t, x), \Delta y(t, x))$ состояния $(z(t, x), y(t, x))$ будет удовлетворять задаче

$$\Delta z_{tx}(t, x) = f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{y}(t, x), \bar{u}(t, x)) - f(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)), \quad (7)$$

$$\Delta y(t, x) = \int_{x_0}^{x_1} (g(t, x, s, \bar{z}(t, s), \bar{u}(t, s)) - g(t, x, s, z(t, s), u(t, s))) ds, \quad (8)$$

$$\Delta z(t_0, x) = 0. \quad (9)$$

Пусть $\psi(t, x), q(t, x)$ пока произвольные n, m -мерные вектор-функции соответственно. Из (7), (8) получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) (f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{y}(t, x), \bar{u}(t, x)) - f(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x))) dx dt, (10)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} q'(t, x) \Delta y(t, x) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} q'(t, s) (g(t, s, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x)) - g(t, s, x, z(t, x), u(t, x))) ds dx dt, (11)$$

где (') для векторов операция скалярного произведения, а для матриц, операция транспонирования.

Введем аналог функции Гамильтона-Понтрягина следующим образом

$$H(t, x, z, y, u, \psi, q) = \psi' f(t, x, z, y, u) + \int_{x_0}^{x_1} q'(t, s) g(t, s, x, z, u) ds + \Phi(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)).$$

С учетом (10), (11) из формулы приращения (6) получим, что

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = & \int_{x_0}^{x_1} (\varphi(\bar{z}(T_1, x), \bar{z}(T_2, x), \dots, \bar{z}(T_k, x)) - \varphi(z(T_1, x), z(T_2, x), \dots, z(T_k, x))) dx + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} (H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{y}(t, x), \bar{u}(t, x), \psi(t, x), q(t, x)) - \\ & - H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))) dx dt + (12) \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} q'(t, x) \Delta y(t, x) dx dt. \end{aligned}$$

Используя Формулу Тейлора из (12) получим справедливость разложения

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = & \int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'(z(T_1, x), z(T_2, x), \dots, z(T_k, x))}{\partial z_i} \Delta z(T_i, x) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \Delta z'(T_i, x) \frac{\partial^2 \varphi(z(T_1, x), z(T_2, x), \dots, z(T_k, x))}{\partial z_i \partial z_j} \Delta z(T_j, x) + \\ & + o_1 \left(\left\| \sum_{i=1}^k \Delta z(T_i, x) \right\|^2 \right) \Big) dx + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} q'(t, x) \Delta y(t, x) dx dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial z} \Delta z(t, x) + \right. \\ & + \frac{\partial H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial u} \Delta u(t, x) + \\ & + \frac{\partial H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial y} \Delta y(t, x) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \Delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial z^2} \Delta z(t, x) + \\
 & + \frac{1}{2} \Delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial y^2} \Delta y(t, x) + \\
 & + \frac{1}{2} \Delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial z \partial y} \Delta y(t, x) + \\
 & + \frac{1}{2} \Delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial y \partial z} \Delta z(t, x) + \\
 & + \frac{1}{2} \Delta u'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial u \partial z} \Delta z(t, x) + \\
 & + \frac{1}{2} \Delta u'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial u \partial y} \Delta y(t, x) + \\
 & + \frac{1}{2} \Delta u'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial u^2} \Delta u(t, x) + \\
 & + o_2(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta y(t, x)\| + \|\Delta u(t, x)\|)^2) dx dt. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Теперь преобразуем слагаемое

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'(z(T_1, x), z(T_2, x), \dots, z(T_k, x))}{\partial z_i} \Delta z(T_i, x) dx.$$

Из (4) ясно, что

$$\Delta z(t, x) = \int_{t_0}^t \Delta z_\tau(\tau, x) d\tau. \quad (14)$$

Пусть $\alpha_i(t), i = \overline{1, k}$ характеристические функции отрезка $[t_0, T_i], i = \overline{1, k}$. Тогда из (14) получаем, что

$$\Delta z(T_i, x) = \int_{t_0}^{t_1} \alpha_i(t) \Delta z_t(t, x) dt. \quad (15)$$

С учетом полученной формулы (15), а также группировав подобные члены из (13) получим, что

$$\begin{aligned}
 \Delta J(u) = & \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[(\psi'(t, x) + \left[\sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \frac{\partial \varphi'(z(T_1, x), z(T_2, x), \dots, z(T_k, x))}{\partial z_i} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial z} \right] \Delta z_t(t, x) dx dt + \right. \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(q(t, x) - \frac{\partial H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial y} \right) \Delta y(t, x) dx dt + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \Delta z'(T_i, x) \frac{\partial^2 \varphi(z(T_1, x), z(T_2, x), \dots, z(T_k, x))}{\partial z_i^2} \Delta z(T_j, x) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial u} \Delta u(t, x) dx dt - \\
& - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\Delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial z^2} \Delta z(t, x) + \right. \\
& + \Delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial y^2} \Delta y(t, x) + \\
& + 2 \Delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial y \partial z} \Delta y(t, x) + \\
& + 2 \Delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial z \partial y} \Delta z(t, x) + \\
& + 2 \Delta u'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial u \partial z} \Delta z(t, x) + \\
& + 2 \Delta u'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial u \partial y} \Delta y(t, x) + \\
& + 2 \Delta u'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial u^2} \Delta u(t, x) + \\
& \left. + o_2((\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta y(t, x)\| + \|\Delta u(t, x)\|)^2) dx dt \right) (16)
\end{aligned}$$

Если предполагать, что вектор функция $\psi(t, x)$ является решением двумерного интегрального уравнения

$$\begin{aligned}
\psi(t, x) = & H_z(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x)) - \\
& - \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \frac{\partial \varphi(z(T_1, x), z(T_2, x), \dots, z(T_k, x))}{\partial z_i},
\end{aligned}$$

а $q(t, x)$ определяется по формуле

$$q(t, x) = H_y(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x)),$$

то формула приращения функционала качества примет вид

$$\begin{aligned}
\Delta J(u) = & \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i,j=1}^k \Delta z'(T_i, x) \frac{\partial^2 \varphi(z(T_1, x), z(T_2, x), \dots, z(T_k, x))}{\partial z_i^2} \Delta z(T_j, x) dx - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial u} \Delta u(t, x) dx dt - \\
& - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\Delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial z^2} \Delta z(t, x) + \right. \\
& + \Delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial y^2} \Delta y(t, x) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +2\Delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial y \partial z} \Delta y(t, x) + \\
 & +2\Delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial z \partial y} \Delta z(t, x) + \\
 & +2\Delta u'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial u \partial z} \Delta z(t, x) + \\
 & +2\Delta u'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial u \partial y} \Delta y(t, x) + \\
 & +2\Delta u'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial u^2} \Delta u(t, x) + \\
 & + o_2((\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta y(t, x)\| + \|\Delta u(t, x)\|)^2) dx dt.
 \end{aligned}$$

Поскольку по предположению множество U открытое, то специальное приращение допустимого управления $u(t, x)$ можно определить по формуле

$$\Delta u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon \delta u(t, x), (t, x) \in D, (17)$$

где ε произвольное достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t, x) \in R^r$, $(t, x) \in D$ произвольная измеримая и ограниченная вектор-функция (допустимая вариация управления $u(t, x)$).

Через $(\Delta z(t, x), \Delta y(t, x))$ обозначим специальное приращение состояния $(z(t, x), y(t, x))$.

Из оценок установленных в [1-3] следует, что $\|\Delta z(t, x)\|$ и $\|\Delta y(t, x)\|$ имеют порядок малости ε .

Учитывая это по схеме, например, работы [4] доказывается, что

$$\begin{aligned}
 \Delta z(t, x, \varepsilon) &= \varepsilon \delta z(t, x) + o(\varepsilon; t, x), \\
 \Delta y(t, x, \varepsilon) &= \varepsilon \delta y(t, x) + o(\varepsilon; t, x), (18)
 \end{aligned}$$

где $(\delta z(t, x), \delta y(t, x))$ (вариация состояния $(z(t, x), y(t, x))$) является решением аналога уравнения в вариациях

$$\begin{aligned}
 \delta z_t(t, x) &= f_z(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)) \delta z(t, x) + f_y(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)) \delta y(t, x) + \\
 &+ f_u(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)) \delta u(t, x),
 \end{aligned}$$

$$\delta y(t, x) = \int_{x_0}^{x_1} (g_z(t, x, s, z(t, s), u(t, s)) \delta z(t, s) + g_u(t, x, s, z(t, s), u(t, s)) \delta u(t, s)) ds,$$

$$\delta z(t_0, x) = 0.$$

Учитывая разложения (18) и формулу (17) в формуле приращения (16) получим, что первая и вторая вариации функционала качества имеют соответственно вид

$$\begin{aligned}
 \delta^1 S(u; \delta u) &= - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_u(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x)) \delta u(t, x) dx dt, (19) \\
 \delta^2 S(u; \delta u) &= \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \delta z'(T_i, x) \frac{\partial^2 \varphi(z(T_1, x), z(T_2, x), \dots, z(T_k, x))}{\partial z_i^2} \delta z(T_i, x) dx -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial z^2} \delta z(t, x) + \right. \\
 & + \delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial y^2} \delta y(t, x) + \\
 & + 2\delta u'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial u \partial z} \delta z(t, x) + \\
 & + 2\delta u'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial u \partial y} \delta y(t, x) + \\
 & + 2\delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial z \partial y} \delta z(t, x) + \\
 & \left. + 2\delta u'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial u^2} \Delta \delta u(t, x) \right) dx dt. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Поскольку область U открытое, то из результатов классического вариационного исчисления следует (см., напр., [5, 6]), что если $u(t, x)$ оптимальное управление, то для всех $\delta u(t, x) \in R^r, (t, x) \in D$

$$\delta^1 S(u; \delta u) = 0, \quad (21)$$

$$\delta^2 S(u; \delta u) \geq 0. \quad (22)$$

Соотношения (21), (22) являются неявными необходимыми условиями оптимальности первого и второго порядков соответственно.

Из тождества (21) можно получить аналог уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи.

Имеет место

Теорема 1. Если множество U открытое, то для оптимальности допустимого управления $u(t, x)$ необходимо, чтобы соотношение

$$H_u(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x)) = 0 \quad (23)$$

выполнялось почти для всех $(t, x) \in D$.

Доказательство. Допустим обратное. Пусть существует такая точка (θ, ξ) (правильная точка [7] управления $u(t, x)$) и s ($1 \leq s \leq r$), что

$$\frac{\partial H(\theta, \xi, z(\theta, \xi), y(\theta, \xi), u(\theta, \xi), \psi(\theta, \xi), q(\theta, \xi))}{\partial u_s} = \alpha \neq 0.$$

Выберем координаты допустимой вариации $\delta u(t, x) = (\delta u_1(t, x), \delta u_2(t, x), \dots, \delta u_r(t, x))'$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \delta u_i(t, x) = 0, (t, x) \in D, i \neq s, \\
 & \delta u_s(t, x) = \begin{cases} \frac{\partial H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial u_s}, \\ (t, x) \in [\bar{\theta}, \bar{\theta} + \varepsilon) \times [\bar{\xi}, \bar{\xi} + \varepsilon), i \neq s, \end{cases} \quad (24) \\
 & \delta u_s(t, x) = 0, (t, x) \in D \setminus [\bar{\theta}, \bar{\theta} + \varepsilon) \times [\bar{\xi}, \bar{\xi} + \varepsilon),
 \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ произвольное достаточно малое число. Учитывая (24) получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial u} \delta u(t, x) dx dt = \\ & = \int_{\bar{\theta}}^{\bar{\theta} + \varepsilon} \int_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi} + \varepsilon} \left(\frac{\partial H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), q(t, x))}{\partial u_s} \right)^2 dx dt = \\ & = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial H(\bar{\theta}, \bar{\xi}, z(\bar{\theta}, \bar{\xi}), y(\bar{\theta}, \bar{\xi}), u(\bar{\theta}, \bar{\xi}), \psi(\bar{\theta}, \bar{\xi}), q(\bar{\theta}, \bar{\xi}))}{\partial u_s} \right)^2 + o(\varepsilon^2) = \varepsilon^2 \alpha^2 + o(\varepsilon^2) \neq 0. \end{aligned}$$

А это противоречит тому, что для оптимального управления первая вариация управления равно нулю.

Этим теорема доказана.

Соотношение (23) является аналогом уравнения Эйлера.

Как было отмечено выше неравенство (22) является неявным необходимым условием оптимальности второго порядка. Но из него определяя вариацию $\delta u(t, x)$ управления $u(t, x)$ специальным образом можно получить аналог условия Лежандра-Клебша. В самом деле, пусть $u(t, x)$ классическая экстремаль, т.е. является решением уравнения Эйлера. Имеет место

Теорема 2. Для оптимальности классической экстремали необходимо, чтобы неравенство

$$v' \frac{\partial^2 H(\theta, \xi, z(\theta, \xi), y(\theta, \xi), u(\theta, \xi), \psi(\theta, \xi), q(\theta, \xi))}{\partial u^2} v \leq 0 \quad (25)$$

выполнялось для всех $v \in R^r, u(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$.

Доказательство. Считая $u(t, x)$ оптимальным управлением, его вариацию определим по формуле

$$\delta u(t, x; \varepsilon) = \begin{cases} v, (t, x) \in D(\varepsilon) = [\bar{\theta}, \bar{\theta} + \varepsilon] \times [\bar{\xi}, \bar{\xi} + \varepsilon] \\ 0, (t, x) \in D \setminus D(\varepsilon), \end{cases} \quad (26)$$

где $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ произвольная правильная точка (точка Лебега [7]) управления $u(t, x)$, а $\varepsilon > 0$ произвольное достаточно малое число.

Учитывая (26) в неравенстве (22) и принимая во внимание вид второй вариации после некоторых преобразований получаем, что

$$\varepsilon^2 \left(v' \frac{\partial^2 H(\theta, \xi, z(\theta, \xi), y(\theta, \xi), u(\theta, \xi), \psi(\theta, \xi), q(\theta, \xi))}{\partial u^2} v \right) + o(\varepsilon^2) \leq 0. \quad (27)$$

Разделяя обе части неравенства (27) на ε^2 и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем соотношение (25). Этим теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Букина А.В., Терлецкий В.А. Вариационный принцип максимума в задаче оптимального управления интегро-дифференциальной системой // Вестник Бурятского ун-та, Сер. 13, математика и информатика, 2008, вып. 9, с.52-55.
2. Букина А.В., Букин Ю.С. Исследование модели динамики популяции методами теории оптимального управления // Известия Иркутского Государственного Университета. Сер. Матем. 2010, № 3, с.59-65.
3. Букина А.В. Идентификация модели видообразования методами теории оптимального управления // Журнал сер. матем. и физ. 2008. т.1. вып. 3. с. 231-255.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. Либроком. 2013, 256 с.
5. Алексеев В.М., Фомин С.В., Тихомиров В.М, Оптимальное управление. М. Физматлит.2005.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Изд-во «Четыре четверти». Мн. 2011, 472 с.
7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. Наука, 1986.

УДК 517.977.52

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ДИСКРЕТНЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ

НАДЖАФОВА М.Я.

Институт Систем Управления НАН Азербайджана

nacafova.melahet@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается одна дискретная задача оптимального управления с нелокальными краевыми условиями при наличии функциональных ограничений типа неравенств на состояние системы. Установлено необходимое условие оптимальности.

Ключевые слова: дискретная нелокальная задача оптимального управления, необходимое условие оптимальности, специальная формула приращения критерия качества.

ON NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN DISCRETE NON-LOCAL CONTROL PROBLEMS WITH FUNCTIONAL RESTRICTIONS OF THE INEQUALITIES TYPE

ABSTRACT

The paper considers one discrete optimal control problem with nonlocal boundary conditions in the presence of functional constraints such as inequalities on the state of the system. The necessary optimality condition is established.

Keywords: discrete nonlocal optimal control problem, necessary optimality condition, special formula for increment of quality criterion.

BƏRABƏRSİZLİKLƏR TIPLİ FUNKSIONAL MƏHDUDİYYƏTLİ LOKAL OLMAYAN DİSKRET İDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRTLƏR HAQQINDA XÜLASƏ

İşdə sistemin vəziyyətinə bərabərsizlik tipli funksional məhdudiyyətlər olan halda lokal olmayan sərhəd şərtlili bir diskret optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün zəruri şərtlər isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: diskret qeyri-lokal optimal idarəetmə problemi, zəruri optimallıq şərti, keyfiyyət meyarının artırılması üçün xüsusi düstur.

Введение. К настоящему времени дискретные задачи оптимального управления, описываемые с обыкновенными разностными уравнениями с локальными краевыми условиями достаточно полно исследованы (см., напр., [1-8]). Недавно в работе [9] установлены ряд нетрадиционные и более общие чем известные, необходимые условия оптимальности первого порядка в одной локальной терминальной задаче оптимального управления описываемая системой обыкновенных разностных уравнений. Изучение же дискретных задач оптимального управления с нелокальными краевыми условиями находится в начальной стадии. В работах [10-12] рассмотрены некоторые задачи оптимального управления дискретными системами с нелокальными краевыми условиями. Установлены ряд необходимых условий оптимальности первого порядка и исследованы случаи их вырождения (особые случаи [13]).

В предлагаемой работе изучается одна нелокальная задача оптимального управления дискретными системами при наличии функциональных ограничений типа неравенств на траекторию системы. Доказано необходимое условие оптимальности типа дискретного принципа максимума Понтрягина при предположении выпуклости, множества допустимых скоростей рассматриваемого уравнения.

Постановка задачи. Рассмотрим дискретную систему управления динамика, которой описывается системой обыкновенных разностных уравнений

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\} \quad (1)$$

с нелокальными краевыми условиями

$$L_0 x(t_0) + L_1 x(t_1) = \ell. \quad (2)$$

Здесь $T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}$ конечное множество последовательных чисел, причем t_0 и t_1 заданы, L_0, L_1 заданные $(n \times n)$ постоянные матрицы, ℓ – заданный n -мерный постоянный вектор, $x(t)$ – вектор состояния, $f(t, x, u)$ заданная n -мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x при всех t , $u(t)$ – r -мерный вектор управляющих функций удовлетворяющая ограничению

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T, \quad (3)$$

где $U \subset R^r$ некоторое непустое ограниченное подмножество из R^r .

Такую управляющую функцию назовем допустимым управлением.

Предположим, что при каждом заданном допустимом управлении $u(t)$, краевая задача (1)-(2) имеет единственное дискретное решение $x(t)$, которую в свою очередь назовем допустимой траекторией.

На множестве допустимых траекторий (состояний) рассмотрим задачу минимизации функционала

$$S_0(u) = \varphi_0(x(t_0), x(t_1)) \quad (4)$$

при ограничениях

$$S_i(u) = \varphi_i(x(t_0), x(t_1)) \leq 0, \quad i = \overline{1, p} \quad (5)$$

где $\varphi_i(x_0, x_1)$, $i = \overline{0, p}$ – заданные непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Допустимое управление доставляющее минимальное значение функционалу (4) при ограничениях (1)-(3), (5) назовем оптимальным управлением.

Вычисление специальных приращений функционалов задающие ограничения, а также критерию качества и необходимое условие оптимальности. Пусть $u(t)$, $t \in T$ – допустимое управление, а $x(t)$, $t \in T \cup t_1$ – соответствующая ему допустимая траектория, т.е. решение краевой задачи (1)-(2).

Предположим, что множество (множество допустимых скоростей)

$$f(t, x(t), U) = \{\alpha: \alpha = f(t, x(t), v), v(t) \in U, t \in T\}$$

выпукло при всех t .

Наряду с краевой задачей (1)-(2) рассмотрим возмущенную краевую задачу

$$x(t+1, \varepsilon) = f(t, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon)) = f(t, x(t, \varepsilon), u(t)) + \varepsilon (f(t, x(t, \varepsilon), v(t)) - f(t, x(t, \varepsilon), u(t))), \quad (6)$$

$$L_0 x(t_0, \varepsilon) + L_1 x(t_1, \varepsilon) = \ell, \quad (7)$$

где $\varepsilon \in [0, 1]$ произвольное число, $v(t) \in U$, $t \in T$ произвольное допустимое управление.

В силу предположения о выпуклости множества $f(t, x(t), U)$ возмущенная траектория $x(t, \varepsilon)$ является допустимой.

Вычислим специальное приращение функционала

$$S_i(u(t, \varepsilon)) = \varphi_i(x(t_0, \varepsilon), x(t_1, \varepsilon)), \quad i = \overline{0, p}.$$

Введя обозначения $a(t) = \left. \frac{\partial x(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$ и используя формулу Тейлора получаем, что

$$S_i(u(t, \varepsilon)) - S_i(u(t)) = \varepsilon \frac{\partial \varphi_i'(x(t_0), x(t_1))}{\partial x_0} a(t_0) + \varepsilon \frac{\partial \varphi_i'(x(t_0), x(t_1))}{\partial x_1} a(t_1) + o(\varepsilon). \quad (8)$$

В силу условий гладкости наложенные на правую части уравнения (1) и на краевые условия (2) получаем, что $a(t)$ является решением линейной краевой задачи (аналог уравнения в вариациях).

$$a(t+1) = f_x(t, x(t), u(t))a(t) + (f(t, x(t), v(t)) - f(t, x(t), u(t))), \quad (9)$$

$$L_0 a(t_0) + L_1 a(t_1) = 0. \quad (10)$$

Пусть $\psi_i(t)$, λ_i , $i = \overline{0, p}$ пока произвольные n -мерные вектор-функции и постоянные векторы соответственно.

В дальнейшем (') штрих будет означать для векторов операцию скалярного произведения, а для матриц-операцию транспонирования.

Из линейной краевой задачи (9)-(10) получаем, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_i'(t) a(t+1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_i'(t) (f_x(t, x(t), u(t))a(t) + (f(t, x(t), v(t)) - f(t, x(t), u(t)))), \quad (11)$$

$$\lambda_1' L_0 a(t_0) + \lambda_1' L_1 a(t_1) = 0. \quad (12)$$

Нетрудно доказать, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_i'(t) a(t+1) = \psi_i'(t_1 - 1) a(t_1) - \psi_i'(t_0 - 1) a(t_0) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_i'(t - 1) a(t). \quad (13)$$

Введем аналоги функции Гамильтона-Понтрягина в виде

$$H(t, x, u, \psi_i) = \psi_i' \cdot f(t, x, u), \quad i = \overline{0, p}.$$

С учетом тождеств (11) - (13) и введенные обозначения разложение (8) функционала $S_i(u)$ записывается в виде

$$\begin{aligned} S_i(u(t, \varepsilon)) - S_i(u(t)) = & \varepsilon \frac{\partial \varphi_i(x(t_0), x(t_1))}{\partial x_0} a(t_0) + \varepsilon \frac{\partial \varphi_i(x(t_0), x(t_1))}{\partial x_1} a(t_1) + \varepsilon \psi'_i(t_1 - 1) a(t_1) - \\ & - \varepsilon \psi'_i(t_0 - 1) a(t_0) + \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} (H(t, x(t), v(t), \psi_i(t)) - H(t, x(t), u(t), \psi_i(t))) + \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'_i(t - 1) a(t) - \\ & - \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_x(t, x(t), u(t), \psi_i(t)) a(t) + \varepsilon \lambda'_i L_0 a(t_0) + \varepsilon \lambda'_i L_1 a(t_1) + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (14)$$

Если предполагать, что $\psi_i(t)$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \psi_i(t - 1) &= H_x(t, x(t), u(t), \psi_i(t)), \\ \frac{\partial \varphi_i(x(t_0), x(t_1))}{\partial x_0} + L'_0 \lambda_i - \psi_i(t_0 - 1) &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_i(x(t_0), x(t_1))}{\partial x_1} + L'_1 \lambda_i + \psi_i(t_1 - 1) &= 0, \end{aligned}$$

то разложение (14) примет вид

$$S_i(u(t, \varepsilon)) - S_i(u(t)) = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} (H(t, x(t), v(t), \psi_i(t)) - H(t, x(t), u(t), \psi_i(t))) + o(\varepsilon), \quad i = \overline{0, p}. \quad (15)$$

Далее для допустимого управления $u(t)$ и соответствующей ему траектории $x(t)$ краевой задачи (9)-(10) введем множество индексов активных ограничений

$$S(u) = \{i: i \in \{1, 2, \dots, p\}, \varphi_i(x(t_0), x(t_1)) = 0\}$$

и предположим, что

$$J(u) = \{0\} \cup S(u).$$

При помощи разложения (15) доказывается

Теорема 1. (Необходимое условие оптимальности первого порядка). Если вдоль процесса $(u(t), x(t))$ множество допустимых скоростей системы (1) выпукло, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство

$$\min_{i \in J(u^0)} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} (H(t, x(t), v(t), \psi_i(t)) - H(t, x(t), u(t), \psi_i(t))) \leq 0 \quad (16)$$

выполнялось для всех $v(t) \in T, t \in T$.

Доказательство. Допустим обратное. Пусть существует допустимое управление $\bar{v}(t)$ такое, что

$$\min_{i \in J(u)} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} (H(t, x(t), \bar{v}(t), \psi_i(t)) - H(t, x(t), u(t), \psi_i(t))) > 0.$$

По аналогии с (6)–(7) рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{aligned}\bar{x}(t+1; \varepsilon) &= f(t, \bar{x}(t; \varepsilon), \bar{u}(t; \varepsilon)) \equiv \\ &\equiv f(t, \bar{x}(t; \varepsilon), u(t)) + \varepsilon(f(t, x(t; \tau), \bar{v}(t)) - f(t, x(t; \varepsilon), u(t))),\end{aligned}\quad (17)$$

$$L_0 \bar{x}(t_0; \varepsilon) + L_1 \bar{x}(t_1; \varepsilon) = l. \quad (18)$$

Положим

$$\bar{a}(t) = \left. \frac{\partial \bar{x}(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}.$$

Из (17), (18) получаем, что $\bar{a}(t)$ является решением краевой задачи

$$\bar{a}(t+1) = f_x(t, x(t), u(t)) + (f(t, x(t), \bar{v}(t)) - f(t, x(t), u(t))), \quad (19)$$

$$L_0 \bar{a}(t_0) + L_1 \bar{a}(t_1) = 0. \quad (20)$$

Учитывая краевую задачу (19)–(20) доказывается, что

$$\begin{aligned}S_i(\bar{v}(t; \varepsilon)) - S_i(u(t)) &= \varphi_i(\bar{x}(t_0, \varepsilon), \bar{x}(t_1, \varepsilon)) - \varphi_i(x(t_0), x(t_1)) = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} (H(t, x(t), \bar{v}(t), \psi_i(t)) - \\ &- H(t, x(t), u(t), \psi_i(t))) + o(\varepsilon).\end{aligned}$$

С учетом этого разложения и сделанного предположения, в силу произвольности ε , при достаточно малых ε получаем, что при $i = \bar{1}, p$

$$\varphi_i(\bar{x}(t_0, \varepsilon), \bar{x}(t_1, \varepsilon)) < 0,$$

и при $i = 0$

$$S_0(v(t; \varepsilon)) - S_0(u(t)) = \varphi_0(\bar{x}(t_0, \varepsilon), \bar{x}(t_1, \varepsilon)) - \varphi_0(x(t_0), x(t_1)) < 0.$$

А это противоречит оптимальности управления $u(t)$.

Теорема доказана.

Заметим, что традиционно при формулировке необходимых условий оптимальности типа принципа максимума Понтрягина в задачах оптимального управления с различными ограничениями используются множители типа Лагранжа. В предлагаемой работе следуя и по аналогии с [7] необходимое условие оптимальности сформулировано в несколько иной, но эквивалентной [7] формулировке принципа максимума Понтрягина. Такая эквивалентная формулировка принципа максимума Понтрягина в дальнейшем позволит исследовать случаи его вырождения.

Доказанная теорема допускает следующее

Следствие. Пусть выполняются условия теоремы. Если допустимое управление оптимально в рассматриваемой задаче, то неравенство

$$\min_{i \in J(u)} \Delta_v H(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi_i(\theta)) \leq 0$$

выполняется при $v \in U$ и $\theta \in T$.

Доказательство. Используя произвольность $v(t), t \in T$ определим его следующим образом:

$$v(t) = \begin{cases} v, & t = \theta, \theta \in T, \\ u(t), & t \neq \theta, t \in T, \end{cases} \quad (21)$$

где $\theta \in T$ а, v произвольная точка из U . Учитывая (21) в соотношении (16) получим доказательство следствия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кирилова Ф.М. Необходимые условия оптимальности типа равенства в дискретных системах // Дифференц. уравнения. 1973, №3. с. 542-546.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка. (Обзор). Минск. ИМ. АН БССР, 1982, № 30 (155), 54 с.
3. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление с разрывными системами. М. Наука 1987. 225 с.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. и др. Методы оптимизации. Минск. Изд-во Четыре четверти. 2022. 472 с.
5. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку. Изд-во БГУ. 2013. 151 с.
6. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку. Элм. 1999. 176 с.
7. Гороховик С.Я. Необходимые условия оптимальности особых управлений в дискретных системах с терминальными ограничениями // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1985, №3. с.48-51.
8. Гороховик В.В., Гороховик С.Я., Маринкович Б. Необходимые условия оптимальности в гладкой задаче управления дискретной системой и с векторным показателем качества // Труды Им НАН Беларуси. 2009, том. 17, № 3, с. 27-40.
9. Марданов М.Дж., Меликов Т.К., Малик С.Т. К теории оптимальных процессов в дискретных системах // Матем. заметки. 2019, т. 106, вып. 3, с. 408-413.
10. Мансимов К.Б., Наджафова М.Я. Об одной нелокальной дискретной задаче управления // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук. 2014, №4, с. 46-54.
11. Наджафова М.Я., Мансимов К.Б. Об оптимальности квазиособых управлений в задаче управления дискретными системами с нелокальными краевыми условиями // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук. 2015, №4, с. 5-12.
12. Мансимов К.Б., Наджафова М.Я. К оптимальности квазиособых управлений в одной дискретной ступенчатой задаче управления с нелокальными краевыми условиями // Прикладная математика и процессы управления. 2018, №4, с. 31-52.
13. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности высокого порядка (Обзор)//Препринт ИМ АН БССР, №30, (155).Минск, 1982 48 с.

UOT:[002:004]:316.774

İNFORMASIYA ANLAYIŞI, İNFORMASIYA TEKNOLOGİYALARI

RƏNA ƏSGƏROVA

Bakı Mühəndislik Universiteti

resgerova@beu.edu.az

XÜLASƏ

İnformasiya anlayışı, müasir elmlərdə fundamental, informatikada isə baza terminlərindən biridir. İnformasiya prosesləri informasiyalar üzərində yerinə yetirilən müxtəlif proseslərin məcmusu kimi başa düşülür. İnsan öz fəaliyyəti prosesində ətraf aləmdən informasiya almadan keçinə bilməz və bu əsasda onu əhatə edənlərlə informasiya mübadiləsində olur, həmin proseslərə şüurlu, hərtərəfli və məntiqi yanaşır. İnformasiyanın təsvir formaları müxtəlifdir: işarə, mətn və qrafik. İlk informasiya texnologiyaları hesab qurğularından və yazıdan istifadə etməyə əsaslanmışdır. İnformasiya texnologiyaları bu informasiyanın emalı üçün insanlar tərəfindən istifadə olunan üsul və qurğuların toplusudur. İnformasiya texnologiyaları bütün hesablama texnikasını və rabitə texnikasını əhatə edir, buraya həmçinin, məişət elektronika, televerlişlər və radio verlişləri də qismən daxildir. İnformasiya texnologiyası-informasiya ehtiyatlarından istifadə olunması proseslərini asanlaşdırmaq, onların etibarlılığını və operativliyini çoxaltmaq məqsədilə informasiyanın toplanması, ötürülməsi, saxlanması, emalı və istifadəçilərə çatdırılmasını təmin edən və vahid texnoloji zəncirdə birləşdirən metodlar, istehsal prosesləri və texniki – proqram vasitələri toplusudur.

Açar sözləri: informasiya, texnologiya, informasiya cəmiyyəti, hesablama texnikası, qurğular, signal, diskret.

THE CONCEPT OF INFORMATION, INFORMATION TECHNOLOGIES

SUMMARY

The concept of information is one of the fundamental terms in modern science and one of the main terms in computer science. Under the information processes means a series of various processes performed on information. A person cannot exist without receiving information from the environment in the course of his/ her activity and on this basis he/ she shares information with those who surround him/ her, treats these processes consciously, comprehensively and logically. Descriptive forms of information are different: sign, text and graphics. The first information technology was based on the use of accounting devices and writing. Information technology is a set of methods and devices used by people to process this information. Information technology covers all computational and communication methods, it also partially includes consumer electronics, television programs and radio programs. Information technology is a combination of methods, production processes and software tools that collect, store, process and transmit information into a single technological chain to simplify the use of information resources, increase their reliability and efficiency.

Keywords: information, technology, information society, computer engineering, devices, signal, discrete.

ПОНЯТИЕ ИНФОРМАЦИИ, ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

РЕЗЮМЕ

Понятие информации является одним из фундаментальных терминов в современной науке и одним из основных терминов в информатике. Под информационными процессами понимается совокупность различных процессов, выполняемых над информацией. Человек не может существовать без получения информации от окружающей среды в процессе своей деятельности и на этой основе он делится информацией с теми, кто его окружает, трактует эти процессы осознанно, комплексно и логически. Описательные формы информации различны: знак, текст и графика. Первые информационные технологии были основаны на использовании учетных устройств и письма. Информационные технологии – это совокупность методов и устройств, используемых людьми для обработки этой информации. Информационные технологии охватывают все вычислительные и коммуникационные методы, сюда также частично входят бытовая электроника, телепрограммы и радиопрограммы. Информационные технологии – это совокупность методов, производственных процессов и программных средств, которые собирают, хранят, обрабатывают и передают информа-

цию в единую технологическую цепочку, чтобы упростить использование информационных ресурсов, повысить их надежность и эффективность.

Ключевые слова: информация, технология, информационное общество, вычислительная техника, устройства, сигнал, дискрет.

İnformasiya müxtəlif cür qiymətləndirilə bilər. Bu qiymətləndirmə informasiyanı qəbul edən şəxsin dünyagörüşü, marağı, meylliyi və s. ilə əlaqədardır. İnformasiya kodlaşdırılma və sitəsilə bir formadan digər formaya keçirilə bilər. İnformasiya şifrələmənin köməyi ilə məxfiləşdirə bilər.

Hər hansı bir məlumat orqanizmə görə də müəlif informasiya daşıya bilər, müxtəlif mənə kəsb edə bilər. İnformasiyanın saxlanması üçün informasiya daşıyıcılarından istifadə edilir. İnformasiya daşıyıcısı kimi kağızdan (perfoqart, perfolent) və elektron tipli daşıyıcılardan (maqnit lenti, maqnit disk, yığcam disk, rəqəmlə video disk, fləş yaddaş və s.) istifadə edilir.

Məlumatların verilməsində prinsipial cəhət ondan ibarətdir ki, onunla əlaqədar fiziki kəmiyyət dəyişiklikləri zamana görə baş verir. Odur ki, məlumat daşıyıcısı kimi zamana görə dəyişən fiziki kəmiyyətlərdən (təzyiq, temperatur, rənglər və s.) istifadə edilir.

Məlumat və ya informasiyanın daşıyıcısı bir qayda olaraq, signal adlanır. (latınca, signum – işarə deməkdir.) Signal məlumat ötürən və müəyyən istiqamətlərdə məlumatı yaymağı əks etdirən fiziki prosesdir.

Signalın işıq, səs, istilik, mexaniki, elektrik və s. kimi növləri vardır.

İnsan üçün informasiya – insan tərəfindən bilavasitə və ya xüsusi qurğuların köməyi ilə alınan, insanın ətraf mühit və orada baş verən proseslər haqqında biliklərini genişləndirən signalın (məlumatların) məzmunudur.

Məlumatı-informasiyanı ötürməyi təmin edən hər hansı fiziki kəmiyyətin zamana görə dəyişməsinə signal deyilir. Bu vaxt məlumatın canlanması üçün signalın müxtəlif xassələrindən istifadə olunur. Signalın məlumatı təqdim etmə xassəsinə signal parametri deyilir (məsələn amplituda, tezlik və s.) İnformasiya parametrlərinin strukturundan aslı olaraq signal, əsasən diskret və kəsilməz formada ola bilər. Diskret formada ötürülən signal rəqəmli (rəqəmsal), kəsilməz formada qəbul edilən signal isə analoq növlü signalara aid edirlər. Signalın kəsilməzliyi onun istənilən verilmiş kiçik zaman kəsiyində müəyyən kiçik kəmiyyət qədər dəyişməsi deməkdir. Signalın diskretliyi onun ancaq ciddi təyin olunmuş son çərçivəsində ötürülməsinin mümkünlüyü deməkdir, yəni signalın özü kəsilməz funksiyayı deyil, signalın amplitudunun ardıcıl diskret qiymətlərini təqdim edir. Signal verilən parametərə nəzərən o vaxt diskret (kəsilməz) hesab olunur ki, bu parametrenin ala biləcəyi qiymətlərin sayı sonlu və ya hesabı olsun. Parametrenin ala biləcəyi bütün mümkün qiymətlər çoxluğu kontinuum (həqiqi ədədlər çoxluğu ilə eyni güclü olan) olduqda isə, signal həmin parametərə nəzərən kəsilməz adlanır. Yəni, kəsilməz signal hər hansı intervalda (diapazonda) sonsuz qiymətlər çoxluğuna malik olur. Onun aldığı qiymətlər arasında kəsilməz olmur. Beləliklə, informasiya iki formada (şəkildə) ötürülə bilər: diskret (rəqəmli, rəqəmsal) və kəsilməz (analoq).

Diskret informasiya hər hansı kəmiyyətin müəyyən anlardakı ardıcıl dəqiq qiymətləri ilə, kəsilməz informasiya isə hər hansı kəmiyyətin dəyişməsinin kəsilməz prosesi ilə xarakte-

rizə olunur. Diskret informasiyanı istənilən rəqəmsal indikatorlardan (məsələn, elektron saatlardan, maqnitofon sayğaclarından və s.) almaq olar. Kəsilməz informasiyanı, məsələn, atmosfer təzyiqi və ya avtomaşının vericiləri vasitəsilə almaq olar. Diskret informasiya insan tərəfindən emal üçün daha rahatdır, ancaq praktik işlərdə tez-tez kəsilməz informasiyaya rast gəlinir. Buna görə də kəsilməz informasiyanı diskret şəkildə gətirmək (diskretləşdirmə) və tərsinə keçirməyi bacarmaq zəruridir. Modem bu keçidləri (modulyasiya və demodulyasiya) həyata keçirmək üçün istifadə olunan qurğudur. Bizi əhatə edən aləmdə gördüyümüz təsvirlər, obyektlər, müəyyən zaman ərzində eşitdiyimiz səslər analoq tipli informasiyalara aid edilir.

Xüsusi kodlarla qurğulara verilən dəyişən siqnallar-analoq, diskret olaraq dəyişən ədədi qiymətlər çoxluğundan ibarət informasiya rəqəmli (rəqəmsal) tipli informasiyaya aid edilir.

Məsələn, kağız üzərində əks olunan mətn və ya şəkillər mikrofondan daxil olan siqnallar analoq tipli informasiyaya, kompüterlərdə əks olunan mətn və ya şəkillər, eşidilən səslər və ya müşahidə edilən hərəkətlər isə rəqəmli (rəqəmsal) tipli informasiyaya aiddir.

İnformatika nöqteyi-nəzərincə informasiyanın aşağıdakı xassələrini daha vacib hesab etmək olar:

- ✓ obyektivlik;
- ✓ tamlıq;
- ✓ dəqiqlik;
- ✓ adekvatlıq;
- ✓ mövcudluq;
- ✓ əlçatanlıq, əlyetərlik;
- ✓ etibarlılıq;
- ✓ faydalılıq;
- ✓ aydınlıq;
- ✓ qiymətlilik;
- ✓ aktuallıq.

İnformasiyanın obyektivliyi və subyektivliyi anlayışları nisbidir.

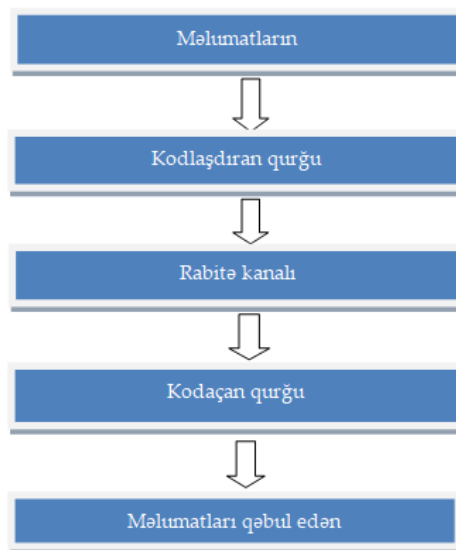
- İnformasiya o vaxt obyektiv hesab edilir ki, o heç kəsin fikri və mühakiməsindən asılı deyildir. Az subyektiv elementlərə malik metodlardan istifadə edilən informasiya daha obyektiv sayıla bilər. Əgər nəzərə alsaq ki, metodlar subyektivdir, onda bu nisbilik tam aşkar şəkildə özünü büruzə verir. Məsələn, "küçədə istidir" məlumatı subyektiv, "küçədə havanın temperaturu 22°C-dir" məlumatı isə obyektiv (əgər termometr düzgün işləyirsə) informasiyadır. Başqa bir misal təbii obyektin fotoçəkilişlə müşahidəsi daha obyektivdir, nəinki həm obyektin insan tərəfindən çəkilmiş rəsmləri əsasında müşahidə aparılması. Deməli, obyektiv informasiyanı ölçmə cihazları (əgər cihaz düzgün işləyirsə) vasitəsilə aparmaq olar.

- İnformasiyanın tamlığı dedikdə, onun bizi maraqlandıran verilənləri özündə cəmləşdirilməsi və qərar qəbulu üçün kifayət qədər olması başa düşülür. Bu informasiyanın keyfiyyətini xarakterizə edir və eyni zamanda onların əsasında yeni verilənlərin alınmasının kafiliyini təyin edir.

- Adekvatlıq informasiyanın işin real obyektiv vəziyyətinə uyğun olması dərəcəsidir. O informasiyanı daha çox adekvat hesab etmək qəbul olunmuşdur ki, oraya daha az subyektiv elementli metodlar daxil edilir.

- İnformasiyanın dəqiqliyi- lazımi signalın vaxtı-vaxtında qeyd olunmasıdır.
- Etibarlı informasiya bizə düzgün qərar qəbul etməyə kömək edir.Etibarlı olmayan informasiya bu hallarda ola bilər.
 - ✓ Qəsdən (gözlənilməz) təhrif halında;
 - ✓ Səs-küyün (müdaxilənin)təsiri nəticəsində (məsələn,"xarab olmuş telefon");
 - ✓ Real faktın qiymətinin kiçildilməsi və ya şişirdilməsi zamanı (şayiələr, reklam və s.)
- İnformasiyanın faydalılığı onun hər hansı məsələnin həllində faydalı rolu ilə qiymətləndirilir.İnformasiyanın faydalılığının qiymətləndirilməsi həmişə subyektivdir.Belə ki,bir obyekt üçün tamamilə faydasız ola bilər.
- İnformasiyanın aydınlığı onun elə şəkildə ifadəsidir ki,o informasiyanı alan şəxs tərəfindən başa düşülən olsun.
- Qiymətlilik alınan yeni informasiyanın həmin anda onu alana verilən problemin həllində lazım olması deməkdir.İnformasiya ona görə qiymətli olur ki,o qarşıya qoyulmuş məqsədlərə çatmağa kömək edir.Əgər informasiyanın qiymətləndirmə meyarı kimi,onun müxtəlif məqsədlər üçün istifadə edilməsini qəbul etsək,onda informasiya doğrudan da müxtəlif qiymətlərə malik ola bilər.
- Alınan informasiyanın cari vəziyyətə uyğun olması onun aktuallığının göstəricisidir.

İnformasiya məlumatlar şəklində hər hansı informasiya mənbəyindən onu qəbul edənə (qəbulediciyə) onlar arasındakı rabitə kanalı vasitəsilə ötürülür.(şəkil 1)



Şəkil 1. İnformasiyanın ötürülməsi sxemi

Mənbə ötürülən signalı kodlaşdırılan məlumatı göndərir.Bu signal rabitə kanalı vasitəsilə ötürülür.Nəticədə qəbuledicidə qəbul olunan signal yaranır ki,bu da dekodlaşdırılaraq qəbul edilən məlumata çevrilir.Məsələn,hava proqnozu haqqında informasiyadan ibarət məlumat qəbulediciyə (televiziya tamaşaçısına)mənbədən (meteoroloq-mütəxəssisdən) rabitə kanalı (televiziya ötürücü qurğusu və televizor) vasitəsi ilə ötürülür.Rabitə kanalı vasitəsilə informasiyanın ötürülməsi bir çox hallarda informasiyanın təhrif olunmasına və itirilməsinə səbəb olan maneələrin təsiri ilə müşayiət edilir.

İnsanlar informasiyanı ətraf aləmdən, hiss (duyğu) üzvləri vasitəsilə qəbul edilir. Kompüter vasitəsilə qəbul edilən informasiyanın mətn, rəqəm, multimedia, məntiqi kimi formaları vardır. Beləliklə, informasiya gündəlik həyatımızdakı əlaqələrimizdə, əsasən, ümumi halda aşağıdakı şəkillərdə və müxtəlif formalarda mövcud ola bilər:

- ✓ Mətnlər;
- ✓ Şəkillər, çertyojlar, fotolar;
- ✓ Radio dalğaları;
- ✓ Elektrik və sinir impulsları;
- ✓ Maqnit yazıları;
- ✓ Jest və mimikalar;
- ✓ İy və dad bilmə (hissetmə orqanları vasitəsi ilə);
- ✓ İrsi əlamətlərin və orqanizmlərin xassələrinin ötürüldüyü xromosomlar və s.

Predmetlər, proseslər, material və ya qeyri-material xassələrinin təsirləri onların informasiya nöqtəyi -nəzərindən baxıldığı zaman informasiya obyektləri adlanırlar. Müasir dünyada informasiyanın təqdim olunma formaları müxtəlifdir.

- ✓ Vizual müşahidə, oxuma vasitəsilə alınan informasiya video (görüntülü) adlanır.
- ✓ İnsanların ünsiyyətlərində səs informasiyası (audio) iştirak edir (şifahi nitq, musiqi səsləri və s.)
- ✓ Ünsiyyətlərdə xüsusi diqqət yazılı informasiyaya verilir.
- ✓ Yazılı informasiya şifahi nitqin səslərə uyğun olan simvollar (hərflər və s.) vasitəsilə təsviridir.

Əlbəttə, şifahi informasiya yazılı informasiyadan daha zəngindir. Hissetmə orqanları və onların işi. Hissetmə orqanları (gözlər, qulaqlar, dil, burun və dəri) məlumatların verilməsi və qəbul edilməsi üçündür. Bu beş hissetmə orqanının köməyi ilə insan ətraf mühit haqqında informasiya alır: görmə, eşitmə, dad bilmə, iy bilmə, toxunma vasitəsilə.

Praktik olaraq, insan informasiyanın 90 faizinə yaxınını görmə (vizual), təxminən 9 faizini eşitmə (audio) və ancaq 1 faizini qalan hissə etmə orqanları (iy bilmə, dad bilmə, toxunma) vasitəsilə alır.

Ətraf mühit haqqında bütün məlumatları biz hissetmə (duyğu) orqanları vasitəsilə əldə edirik. Hissetmə (duyğu) orqanları iki cür olur: effektor (ötürücü-verici orqan) və reseptor (qəbuleici orqan).

Məlumatın fiziki daşıyıcısı kimi səs siqnallarından, işıq dalğalarından, təzyiqdən, temperaturdan, qaz və maye molekullarının konsentrasiyasından, təcildən və s. istifadə edilir. Məlumatın qəbul edilmə vasitələri kimi isə hiss orqanları, eşitmə, görmə (optik) və taktil (korların dili) istifadə edilir.

Bilavasitə danışq dili ilə ünsiyyətdən savayı alətlərdən istifadə edilən dillər də var. Məsələn, həyəcan siqnalı, fit səsi, tonqal yandırmaq və s.

Hissetmə orqanlarının funksional qabiliyyətinin müəyyən sərhədi vardır. Məsələn, insanın akustik (səs impulsu) və optik (lampanın yanması) siqnalına qarşı reaksiya vaxtı 140-250 msan-dir, göstərilən sözü oxuma 350-550 msan, ev əşyasının adını demə 600-800 msan-

dir. Buradan görünür ki, qavrama prosesi heç də ancaq reseptorların funksiyası deyil. Burada, həmçinin əsəb yolları ilə oyanmanın baş verməsi, onun beynində emalı və cavabın effektorə verilməsi də aiddir. Sözü gedən proses qəbuledici orqan kimi gözə 40 m/san, qola 50 msan-yə gəlir.

Beyində qıcıqlanmaların emalı. Effektor və reseptorların funksiyaları hissetmə orqanlarının psixologiyası ilə daha dərinədən öyrənilir, əsəb yolları ilə həyəcanların oyanması neyrofizologiya və neyroanatomiya elm sahələrində öyrənilir. Həyəcanların cavablanması isə beynində baş verir.

Rabitə qurğuları. Xarici quruluşuna görə, rabitə qurğuları (RQ) qəbuledici və ötürücüdən ibarətdir. Daxli quruluşa görə isə RQ heç bir ümumi mülahizəyə uyğun gəlmir. Məlumatı giriş və çıxışda gücləndirmək və ya regenerasiya etmək olar (bunlar çeviricilər vasitəsi ilə aparılır). Ötürücülərdən qəbulediciyə verilərkən istifadə olunan məlumat daşıyıcısı kanal adlanır. Məlumatı mənbədən alana (qəbul edənə) "rabitə kanalı" adlanan hər hansı mühit vasitəsi ilə ötürülür.

İnformasiya – texniki qurğularda və sistemlərdə. İnformasiya mübadiləsi təkcə insanlar arasında baş vermir. Müasir həyat onu asanlaşdıran və müxtəlif məsələlərin həllində insanları əvəz edən cürbəcür qurğu və maşınlar təşəvvür edilmir. Eyni zamanda maşınların işləri informasiyanın emalı prosesləri olmadan mümkün deyildir.

İnformasiyanın növləri: İnformasiyanın növləri (tipləri) dedikdə onun təsnifatı başa düşülür. Təsnifat, ümumiyyətlə, müəyyən əlamətlərə görə qruplara bölmək deməkdir. İnformasiyanın növləri (tipləri)-materianın müxtəlif sahələrinə informasiya yönü yanaşmanın nəticəsidir. İnformasiyanın növləri:

- Məntiqi;
- ədədi;
- mətn;
- audio (səsli);
- qrafiki;
- video (görüntülü);
- multimedia.

İnformasiyanın təqdim olunma (verilmə) üsulları aşağıdakılardır:

- Mətn;
- ədədi;
- qrafiki;
- səs;
- kombinasiyalı.

Cəmiyyət və informasiyanın inkişaf mərhələləri- insan cəmiyyətinin yeni inkişaf mərhələsi kimi qəbul edilən informasiya cəmiyyətində informasiya texnologiyasından bacarıqla istifadə edilməsi cəmiyyət üzvlərinin həyat tərzinin yüksəldilməsində mühüm yer tutmalıdır.

İnsan cəmiyyətinin praktik olaraq bütün mərhələlərdə inkişafı texniki tərəqqi əsasında baş vermişdir. Əmək məhsuldarlığının daima artırılması avtomatlaşdırmanı labüd edir. Əmək kollektivlərinin formalaşdırılması prosesində biliklərin mübadiləsinə ehtiyac duyulur. İlkin

mərhələdə qazanılmış biliklər şifahi şəkildə nitq vasitəsi ilə nəsil-dən-nəsilə ötürülürdü. Sonrakı mərhələdə yazı mədəniyyətinin meydana gəlməsi bu biliklərin informasiya şəklində formalaşmasında mühüm yer tutdu.

XX əsrin 40-cı illərində informasiya emalına olan tələb və təklif arasındakı fərqlərin ciddi şəkildə artması ekstensiv faktor kimi hərbi-sənaye kompleksinin inkişafına mane olurdu. Buda öz növbəsində informasiya emalının yeni texniki vasitəsi olan EHM-lərlə həyata keçirilməsi zərurətini meydana çıxardı. Nəticədə, informasiya cəmiyyəti informasiya sənayesinin intensiv inkişaf mərhələsi kimi təşəkkül tapdı.

İnformasiyanın əhəmiyyətinin artması insan cəmiyyətinin təbii yolla təkamülü prosesinin nəticəsidir. Hal-hazırda informasiya ən qiymətli resurs və kapital hesab olunur. Bu işə əmək ehtiyatlarının maddi istehsalatdan informasiya mühitinə axınında özünü bariz şəkildə büruzə verir.

İqtisadiyyatın əksər subyektlərinin siyasi, iqtisadi və mədəni məqsədləri informasiya cəmiyyətinin yaradılmasına xidmət edir. Bu məqsəd və məramların həyata keçirilməsi çox saylı milli strateji layihələrin və proqramların işlənməsi ilə səciyyələnir.

İnformasiya cəmiyyətinin yaradılması sahəsindəki görülməli işlər hal-hazırda cəlbədicə və istiqamətverici fəaliyyət sahəsinə çevrilməkdədir.

İnformasiya cəmiyyətinin yaradılması və inkişafı konsepsiyaları kifayət qədər abstrakt formada həyata keçirilməkdədir. Bu konsepsiyaları mahiyyətə üç mərhələyə ayırmaq olar:

1. İnformasiyanın çatdırılması texnologiyalarının işlənməsi;
2. İnformasiya və kommunikasiya texnologiyalarının qarşılıqlı inkişafı nəticəsində informasiya texnologiyaları cəmiyyətinin yaranması;
3. İnformasiya cəmiyyətinin özəyi hesab olunan informasiya kontentinin məzmun və forma baxımından zənginləşdirilməsi hesabına informasiya mədəniyyətinin təşəkkül tapması.

İnformasiya cəmiyyətini fərqləndirən əsas amillər aşağıdakılardır:

- ✓ cəmiyyətin həyatında informasiya və biliyin artan rolu;
- ✓ informasiya kommunikasiyalarının, məhsullarının və xidmətlərinin daxili satış məhsullarında artan payı;
- ✓ insanlar üçün aşağıdakıları təmin edən qlobal informasiya mühitinin yaranması:
 - səmərəli informasiya qarşılıqlı əlaqəsi;
 - dünya informasiya resurslarına əlçatanlıq;
 - informasiya məhsullarına və xidmətlərinə olan tələbatlardan məmnunluq.

İnformasiya cəmiyyəti müqayisəedilməz dərəcədə daha yüksək istehsal səmərəliliyi ilə fərqlənir. İnformasiya texnologiyaları insan resurslarının inkişafını keyfiyyətə dəyişir. Əgər əvvəllər istehsal gücləri (yəni, istehsalat və ona cəlb olunan insanlar) əsas hesab edilirdisə, indi-müasir şəraitdə ən çox mobil olan intellekt və maliyyədir.

İnformasiya cəmiyyəti anlayışı dedikdə, əsasən, aşağıdakılar başa düşülür:

- ❖ informasiya cəmiyyətində əsas fəaliyyət sahəsi: informasiyanın istehsalı və istifadəsi,

- ❖ informasiya cəmiyyətində ən qiymətli resurs: informasiya resursları,
- ❖ informasiya cəmiyyətinin baza texnologiyaları və texnikası: yeni informasiya və telekommunikasiya texnologiyaları və texnikası,
- ❖ informasiya cəmiyyətində informasiya mühiti: vahid informasiya mühitinin formalaşması və inkişaf etdirilməsi perspektivləri.

İnformasiya cəmiyyətinə keçid üç mərhələdən ibarətdir:

1. Kompüterləşmə mərhələsi,
2. İnformasiya infrastrukturalarının yaradılması mərhələsi,
3. Əsas informasiya tələbatlarının inkişafı və təmin edilməsi mərhələsi.

I mərhələ- kompüterləşmə mərhələsi.

Bu mərhələdə:

- elmi- texniki tərəqqinin öncül istiqamətləri nəzərdən keçirilir,
- yeni informasiya texnologiyalarının yaradılması və effektiv şəkildə tətbiq olunması məsələləri ciddi formada tədqiq olunur,
- informasiya vasitələri və elementlərinin istehsalı üçün əhəmiyyətli olan konstruktor, texnoloji və sənaye bazalarının modernləşdirilməsi həyata keçirilir,
- hesablama və mikroprosessor texnikasının insanların müxtəlif fəaliyyət sahələrində tətbiqi üçün alınması, paylanması və kütləvi şəkildə istifadə olunması üçün müxtəlif layihələrin və dövlət proqramlarının realizasiya olunması işləri başa çatdırılır.

II mərhələ- informasiya infrastrukturalarının yaradılması mərhələsi:

2-ci mərhələdə, məhəlli qaydada informasiya infrastrukturaları yaradılaraq dünya iqtisadi sisteminin tərkibində olan beynəlxalq infrastrukturaya inteqrasiya edilir.

Bu mərhələdə həyata keçirilən əsas tədbirlər aşağıdakılardır:

- əhalinin informasiya texnikası vasitələrinə, ilk növbədə fərdi kompüterlərə və periferik qurğulara olan tələbatlarının təminatı;
- geniş profilli informasiya verilənlərinin bank və bazalarının yaradılması;
- lokal və korporativ informasiya şəbəkələrinin yaradılması;
- informasiya cəmiyyətinin dayaq zonalarının yaradılması və onların global şəbəkələrə qoşulması;
- geniş zolaqlı inteqrasiya olunmuş telefon şəbəkələrinin və rəqəmsal rabitənin yaradılması.

Bu mərhələ həmçinin :

- əldə olan informasiya fondlarının kompüterlərə mənimsədilməsi və onların birləşmiş lokal və korporativ şəbəkələrdəki verilənlər bazasına yüklənməsi ilə xarakterizə olunur;
- əhalinin informasiya mədəniyyətinə yiyələnməsi üçün tədbirlər həyata keçirilir;
- informasiya fondlarının fərdiləşdirilməsi və informasiya şəbəkələrinə inteqrasiyası dövrü kimi də xarakterizə olunur.

III mərhələ- əsas informasiya tələbatlarının inkişafı və təmin edilməsi mərhələsi.

Bu mərhələdə həyata keçiriləsi tədbirlər aşağıdakılardan ibarətdir:

- informasiya infrastrukturalarının yaradılmasını başa çatdırmaq və onların ümumdünya infrastrukturalarına integrasiya edilərək qovuşmasını təmin etmək;
- yeni informasiya vasitələrinin, sistem və texnologiyalarının insan fəaliyyətinin bütün sahələrinə kütləvi şəkildə tətbiq etmək;
- cəmiyyətin hər bir üzvünün gündəlik fəaliyyəti, istirahəti və məişət zəminində zəruri ehtiyac duyduğu bütün mümkün informasiyalara əlverişliliyini təmin etmək;
- əhalinin informasiya mədəniyyətinə yiyələnməsini tam şəkildə başa çatdırmaq. Bu mərhələ həmçinin, insan cəmiyyətinin əldə etdiyi bütün informasiyalara sərbəst müdaxilə edilməsi ilə də xarakterizə oluna bilər. Belə ki, bu informasiyalardan təkə istifadəçi kimi yox, həm də şəhər dövlət və ümumdünya səviyyəsində informasiya fondlarının zənginləşdirilməsində əvəzsiz xidmətlərin həyata keçirilməsi nəzərdə tutula bilər. İnformasiya fondları praktiki olaraq hər bir dövlətin vətəndaşına məxsus olaraq, milli sərvəti hesab ediləcək səviyyədə inkişaf etdirilməlidir. Bu mənada informasiya fondlarının aktuallaşdırılması və daima zənginləşdirilməsi nəzərdən qaçırılmamalıdır.

Cəmiyyətin informatlaşdırılması- informasiya cəmiyyətinə keçid mərhələsində strateji cəhətdən prioritet istiqamət kimi götürülür. Cəmiyyətin informatlaşdırılması konsepsiyalarının işlənməsi və həyata keçirilməsi yaşından, cinsindən, dilindən, irqindən, əqidəsindən, dinindən, dünyagörüşündən, siyasibaxışlarından, iqtisadi vəziyyətindən, mədəni səviyyəsindən, fiziki durumundan, sağlamlığından və s. asılı olmayaraq hər bir vətəndaşı əhatə etməlidir.

Cəmiyyətin informatlaşdırılması – müasir cəmiyyətin yeni inkişaf mərhələsinə qədəm qoyaraq informasiya cəmiyyətinə qovuşmasında həlledici faktor rolunu oynayır.

İnformasiya cəmiyyətində yeni informasiya və telekommunikasiya texnologiyaları və vasitələrinin yüksək səviyyədə tətbiqi nəticəsində cəmiyyətin hər bir üzvünün həyat tərzinin qənaətbəxş səviyyədə təmin olunmasına görə real imkanlar yaradılır.

Keçmiş sənayeləşdirilmiş texniki- tərəqqi cəmiyyətindən yeni informasiya cəmiyyətinə keçid strategiyası müasir insan sivilizasiyasının təkamülü prosesinin üstünlüklərinə istinadən yaradılmalıdır.

İnformasiya cəmiyyətinə keçid səviyyələrini bir neçə əlamətə görə ciddi şəkildə fərqləndirmək olar:

- ❖ informasiya tələbatlarının səviyyəsi;
- ❖ informasiya mədəniyyətinin səviyyəsi;
- ❖ iqtisadiyyatın informatlaşması səviyyəsi;
- ❖ təhsilin informatlaşması səviyyəsi;
- ❖ dünya informasiya mühitinə giriş səviyyəsi;
- ❖ qloballaşma və integrasiya səviyyəsi.

İnformasiya cəmiyyətinin xarakterik xüsusiyyətləri kimi – cəmiyyətin bütün üzvlərinin lazımı şəkildə, kifayət qədər informasiya ilə təminatı yüksək səviyyədə informasiya xidmətlərinin həyata keçirilməsi hallarını göstərmək olar.

İnformasiya cəmiyyətinə xas olan səciyyəvi xüsusiyyətlər:

- ✓ vahid informasiya mühitinin formalaşması;
- ✓ şəbəkə informasiya texnologiyalarından kütləvi şəkildə istifadə olunması;
- ✓ informasiya resurslarının aparıcı rolunun artırılması;
- ✓ müxtəlif sahələr üzrə infrastruktur şəbəkələrin inkişaf etdirilməsi;
- ✓ informasiya məhsullarına və xidmətlərinə artan tələbatlarının vaxtında və yerində ödənilməsi;
- ✓ təhsil səviyyəsinin yüksəldilməsi;
- ✓ informasiya mübadilələrinin artan sürətlə inkişaf etdirilməsi;
- ✓ informasiyanın şəxsi,ictimai,mədəni,siyasi və dövlət səviyyəsində mühafizəsinin təşkil edilməsi;
- ✓ informasiya təhlükəsizliyi qaydalarına riayət edilməsi;
- ✓ intellektual səviyyənin, texnoloji bacarıqların və professionalizmin yüksəldilməsi və s.

İnformasiya cəmiyyətinin fərqləndirici xüsusiyyətləri:

- cəmiyyətdə informasiya iqtisadiyyatının təşəkkül tapması;
- cəmiyyət üzvlərinin yüksək səviyyədə informasiya tələbatının yaranması;
- cəmiyyətdə kütləvi şəkildə informasiya ehtiyaclarının ödənilməsi;
- cəmiyyətdə yüksək informasiya mədəniyyətinin yaranması;
- cəmiyyət üzvlər üçün açıq informasiya şəbəkələrinin genişlənməsi;
- cəmiyyət üzvləri üçün informasiya təhlükəsizliyi məsələlərinə diqqətin artırılması və s.

İnformasiya cəmiyyəti-qlobal,siyasi-iqtisadi,antropososioloji və texnoloji proyekt olmaqla bərabər,dünya ictimai quruculuğuna idarə edilən sivilizasiyalı keçidini nəzərdə tutur.

İnformasiya cəmiyyətinin bütün sahələrində hakim mövqeyə Kütləvi Kommunikasiya Sistemləri (KKS) malik olaraq cəmiyyətin həyatında əhəmiyyətli rol oynayacaqdır.

KKS-lər kompüter telekommunikasiya texnologiyaları,o cümlədən,İnternet texnologiyaları vasitəsilə rahat şəkildə relizasiya olunurlar.

İnternetin yaranması və vaxtaşırı genişləndirilməsi cəhdlərinin informasiya cəmiyyətinə keçid ilə üst-üstə düşməsi heç də təsadüfi deyildir.

Məhsul istehsalına əsaslanan ənənəvi cəmiyyətdə infrastrukturu yollar şəbəkəsi təşkil edirdi.İnformasiya cəmiyyətində iqtisadi göstəricilər (iqtisadi artım,pul axınları,fond indeksləri)qeyri-maddi formalarında təzahür etməyə başlayır,bunlardan bir çoxu informasiya təbiətlidir və İnternetdə yayılır.

İnternet informasiyanın yayılması və mübadiləsinin güclü kanalını,informasiya mühitini təşkil edir.Yayılan informasiyanın formatı çox müxtəlif ola bilər:yeniliklərin (xəbərlərin),ədəbi əsərlərin mətnləri;kompüter proqramları;təsvirlər(fotoqrafiyalar,qrafika),musiqi əsərləri-kifayətdir ki,onlar rəqəmli(rəqəmsal)formaya çevrilmiş olsun.İnternet elmdə,təhsildə, mədəniyyətdə,kommersiya fəaliyyətində,idarəetmədə,alış-verişdə,ünsiyyətdə və istirahətdə informasiya tərkibinə malikmüxtəlif işlərin görülməsi üçün istifadə edilir.Kompüter şəbəkələri ilə alınan informasiyanın xüsusi həcmi durmadan artır,ənənəvi informasiya kanallarının rolu isə azalır.

İnformasiya cəmiyyətində şəxsiyyətin formalaşması və inkişaf etdirilməsi üçün vacib olan keyfiyyətlər içərisində ümdə yeri zəruri hesab edilən informasiyaya əlverişlilik tutur.

İnformasiyaların emalının metod və vasitələrinin yeni mərhələlərinin yaradılması nəticəsində cəmiyyətin həyatında edilən kardinal dəyişikliklər informasiya inqilabları adlanır.

XX əsrdə başlanılan sonuncu informasiya inqilabı- əhalinin aktiv hissəsi üçün əlçatan olan instrumental əsasın, informasiyanın ötürülməsi və saxlanması üsullarının, həmçinin informasiya mübadiləsinin köklü dəyişməsinə özündə ehtiva edir.

İnformatlaşdırma vasitələri əsasında bəşəriyyətin intellektual qabiliyyətlərinin birləşdirilməsinin texnoloji əsası yaradılır, birlikdə təkamül (koevolüsiya) formasında inkişaf edən kollektiv (inteqral) şüur, təbii-elmi və humanitar biliklərin ümumi sistemi formalaşır.

İnformasiya partlayışı- informasiyanın artım tempi və cəmiyyətdə onun toplanılmasının sürətlənməsidir.

İnsan topladığı informasiya, biliyin həcmi 1990-cı ildən etibarən hər 5 ildə ikiqat artmışdır. Proqnozlaşdırılır ki, 2020-ci ildən informasiyanın ikiqat artımı hər 10 həftədə olacaq. İnformasiyanın və biliklərlə iş texnologiyalarının bol (yəni çox) miqdarda olması cəmiyyətin həyatını daha mürəkkəb edəcək.

İnsanın onu əhatə edən dünya və cəmiyyət ilə qarşılıqlı münasibətinin əsasında informasiya prosesləri durur.

İnformasiya proseslərinə informasiyanın toplanılması, ötürülməsi, saxlanması, emalı və istifadəsi çatdırılması aiddir.

İnformasiya prosesləri insanların həyat fəaliyyətində, elm və texnikada vacib rol oynayırlar. Bəşəriyyətin inkişafı ərəfəsində bu proseslərin daxili məzmununun dəyişməməsinə baxmayaraq, onların mexanikləşdirilməsi və avtomatlaşdırılması meyilləri açıq şəkildə özünü göstərir. Kompüter texnikasının yaranması və inkişafı nəticəsində bu proseslərin avtomatlaşdırılması daha da sürətlənmiş və hazırda informatikanın əsas probleminə çevrilmişdir.

İnformasiyanın toplanması prosesi – öyrənilən obyektin vəziyyəti haqqında məlumat alınması məqsədi ilə aparılır.

İnformasiyanın toplanılması prosesi adi halda insan tərəfindən, avtomatlaşdırılmış halda isə texniki vasitələr və sistemlər tərəfindən yerinə yetirilir. Məsələn, istifadəçi qatarların və ya təyyarələrin hərəkəti haqqında məlumatı cədvələ baxmaqla və ya başqasından soruşmaqla ala bilər. Avtomatlaşdırılmış variantda isə o, u məlumatı texniki vasitələrin köməyiylə (avtomatik arayış, telefon və s.) əldə edə bilər. Texniki qurğularda və sistemlərdə informasiyanın toplanılması üçün müxtəlif ölçü və avtomatik qeydedici cihazlardan istifadə olunur.

İnformasiyanın ötürülməsi- toplanılan informasiyanın emal edilməsi üçün o, emal vasitələrinə ötürülməlidir.

İnformasiyanın toplanılan məntəqədən emal məntəqəsinə qədər olan məsafəsindən aslı olaraq informasiyanın ötürülməsi müxtəlif vasitələrlə yerinə yetirilə bilər. Yaxın məsafəli ötürmələrdə kabellərdən, uzaq məsafəli ötürmələrdə isə rabitə kanallarından (telefon, teleqraf, peyk rabitəsi və s.) istifadə edilir. Müasir kompüterlərdə informasiyanın telefon kanalı vasitəsilə uzaq məsafədən qəbulu və ötürülməsi üçün modem (modulyator- demodulyator) adlanan xüsusi qurğudan istifadə olunur.

Texnoloji proseslərin idarəedilməsi sistemlərində toplanan informasiya çox vaxt analog (kəsilməz) formalı kəmiyyətlər olur (temperatur,təzyiq,səviyyə və s.).Mövcud rabitə kanalları və kompüterlər isə diskret (rəqəmli,rəqəmsal) formalı siqnallarla işləyirlər.Odur ki,belə hallarda informasiya ötürülməzdən əvvəl analog formasından diskret formaya çevrilməlidir.Bu məqsədlə anloq kod çevricisi adlanan xüsusi qurğudan istifadə edilir.

İnformasiya daşıyıcısı kimi kağızdan,perfolentdən,perfokartdan,maqnit lentindən, müəssir kompüterlərdə isə maqnit və yığcam disklərdən,fləş yaddaşdan və s.istifadə olunur.

İnformasiyanın emalı adi halda insan tərəfindən,avtomatlaşdırılmış halda isə kompüter vasitəsilə aparılır.

Məlumdur ki, emaldan öncə informasiyanın axtarışı baş verir.İnformasiyanın axtarışına ayrıca proses kimi də baxmaq olar.İnformasiyanın emalı informatikanın əsas problemlərindən biri hesab olunur.İnformasiyanın emalı üçün əvvəlcədən hazırlanmış alqoritmlərdən və proqramlardan istifadə edilir.

İnformasiyanın emalından alınan nəticələr tələb olunan formada istifadəçilərə çatdırılır.İnformasiyanın istifadəçilərə çatdırılmasına da çox zaman ayrıca proses kimi baxılır.

Avtomatlaşdırılmış üsulla (kompüterlə) emal olunan formada istifadəçilərə, adətən, kompüterin xaricətmə qurğuları ilə (monitor,printer,qrafikçəkən qurğu və s.) mətn,cədvəl,qrafik və s.şəkildə çatdırılır.

İnformasiya prosesinin gedişində müəssisə və ya təşkilatda dövr edən informasiya onların fəaliyyət növündən asılı olaraq bu və ya digər formada emal olunmağa məruz qalır.

- Yaranma mənbəyinə görə informasiya aşağıdakılara ayrılır:giriş və çıxış,daxili və xarici.
- Emal prosesinə görə informasiya aşağıdakılara bölünür:ilkin və ikinci,aralıq və nəticəvi.

Bu zaman emal edilən verilənlər bir şəkildən digərinə çevrilir.İnformasiya cəmiyyətinin inkişafı səviyyəsinə görə verilənlərin emalına ayrılan iş sərfiyyatı artır və tətbiq edilən informasiya texnologiyalarının təkmilləşdirilməsi tələb olunur.

Texnologiya (yunanca,techne-ustalıq,loqos-təlim(öyrətmə),yəni,ustalıq haqqında təlim)-emal edilən obyektlərin zəruri keyfiyyət dəyişmələri baş verən istehsalat proseslərinin üsul və vasitələri haqqında biliklərin toplusudur.

İnformasiya texnologiyaları- obyektin,prosesin və ya hadisənin vəziyyəti haqqında yeni keyfiyyətdə informasiyanın alınması üçün vasitələrin və verilənlərin toplanılması,emalı, ötürülməsi metodlarının toplusundan istifadə edən prosesdir.

Belə tərifdə vermək olar:

İnformasiya texnologiyaları- proseslərdir,informasiyanın axtarışı, toplanılması, saxlanması, emalı,təqdim olunması,yayılması metodlarıdır,bu proses və metodların həyata keçirilməsi üsullarıdır.İnformasiya texnologiyasının məqsədi insan tərəfindən analiz üçün informasiyanın hasilatı və sonra hər hansı fəaliyyətin həyata keçirilməsi üçün qərar qəbul etməkdir.İnformasiya sistemi- verilənlər bazasındakı informasiya,onu emal etməyi təmin edən informasiya texnologiyaları və texniki vasitələr toplusudur.

Sistemə xarici və ya daxili mənbələrdən daxil edilən informasiya emal olunur və istifadəçi üçün rahat şəkildə təqdim olunur,tələbatçıya və ya digər sistemə ötürülür.Emal edilmiş

çıxış informasiyası əks əlaqə vasitəsilə giriş informasiyanın təşhihi (səhihliyinin yoxlanılması) üçün ötürülə bilər. İnformasiya sisteminin əsasında proqram kompleksi durur. Həmin proqram bir tərəfdən adi proqram məhsuludur, amma standart tətbiqi proqramlardan əhəmiyyətli (önəmli) dərəcədə fərqi var. Digər tərəfdən informasiya predmet sahəsindən aslı olaraq funksiyalarına, arxitekturasına realizasiyasına görə bir-birindən çox güclü fərqlənə bilərlər.

İnformasiya mühafizəsi-informasiya təhlükəsizliyini təmin edən kompleks tədbirlərdən ibarətdir.

Azərbaycan Respublikasının informasiya təhlükəsizliyi doktrinasında informasiya resurslarına icazə verilməmiş (icazəsiz) daxil olma, informasiya və telekommunikasiya sistemlərinin təhlükəsizliyinin təmin olunması məsələləri bütövlükdə informasiya mühitində Azərbaycan Respublikasının vacib milli maraqları kimi qeyd edilmişdir. İnformasiya təhlükəsizliyi dedikdə, informasiya münasibətlərində olan subyektlərə, o cümlədən, informasiya sahibləri, ondan istifadə edən, onu dəstəkləyən istifadəçilərə informasiyanın və onu dəstəkləyən infrastrukturun təbii və ya süni xarakterli, təsadüfi və ya bilə-bilə edilən yad təsirlərdən mühafizəsi başa düşülür.

İnformasiya sistemlərindən istifadə edən subyektlərin maraqlar spektrini aşağıdakı kateqoriyalara bölmək olar: informasiya resurslarının əldə edilməsinin, bütövlüüyünün və məxfiliyinin təmin olunması və mövcud infrastrukturunun dəstəklənməsi. Əldə edilməməyəyən zaman müddətində lazım olan informasiya xidmətinin əldə edilməsi deməkdir.

Bütövlülük dedikdə, informasiyanın aktiv olması və ziddiyyətli olmaması nəzərdə tutulur, onun dağılmaqdan qorunması və icazə verilməmiş dəyişikliyə məruz qalmaması başa düşülür. Məxfilik- informasiyaya icazə verilməmiş daxil olmadan mühafizə deməkdir.

Bütövlüyü statiki (informasiya obyektlərinin dəyişilməz qalması) və dinamiki (mürəkkəb hərəkətlərin dəqiq yerinə yetirilməsi) kimi 2 qrupa bölmək olar: Dinamiki bütövlülük nəzarət vasitələri, əsasən, oğurluğu aşkar etmək, ayrı-ayrı xəbərləri çeşidləmək və ya təkrarən göndərmək məqsədilə maliyyə xəbərlər axınının analizi zamanı tətbiq edilir. Təhlükə- informasiya təhlükəsizliyini müəyyən surətdə pozan potensial mümkünlükdür.

Təhlükənin həyata keçirilməsinə cəhd göstərməsinə hücum, bu cəhdi həyata keçirən şəxs isə cinayətkar adlanır. Potensial cinayətkarlar təhlükə mənbəyi hesab olunurlar.

İnformasiyanın mühafizəsi üçün mövcud informasiya təhlükəsizliyi sisteminin tərkibinə aşağıdakı lazımi kompleks tədbirlər və texniki həllər daxil olmalıdır:

- İnformasiya kanalları və resurslarına yad təsirləri ləğv etmək yolu ilə informasiya mühitinin normal işləməsinin təminatı;
- İnformasiya mühitindən düzgün olmayan şəkildə istifadə etməklə bütövlüüyün pozulmasına gətirib çıxara biləcək müxtəlif cəhdlərin aşkarlanması və ləğv edilməsi yolu ilə informasiyanın icazə verilməmiş (icazəsiz) daxil olmalardan mühafizə edilməsi;
- İstifadəçilərin və xidməti heyətin səlahiyyətsiz hərəkətlərini sübut edən daxili mühafizə vasitələrinin dağıdılmasının qarşısının alınması;
- Proqram təminatı (software) və texniki vasitələrin (hardware) normal işlənməsinə maneə olan bütün "virusların" və digər ziyanverici proqram məhsullarının zərərsizləşdirilməsi.

Mövcüd texnologiyanın təhlil olunması ilə bərabər, informasiya təhlükəsizliyinin infrastrukturunun yaradılması üçün əsas sayılan informasiya təhlükəsizliyi və təşkilati –paylaşdırıcı sənədlərin topluları sahəsində siyasətin işlənilməsi həyata keçirilməlidir.

Beynəlxalq qanunvericiliyə əsaslanan bu sənədlər təhlükəsizlik xidmətləri və informasiya mühafizəsi şöbələrinə mühafizə tədbirlərinin bütün spektrlərini aparmaq, xarici təşkilatlarla qarşılıqlı əlaqələr yaratmaqla qanun pozanlar məsuliyyətə cəlb etmək üçün lazımi hüquqi baza yaratmağa imkan verir.

ƏDƏBİYYAT

1. Kərimov S.Q., Həbibullayev S.B., İbrahimzadə T.İ. İnformatika. Ali məktəblər üçün dərslik. Bakı, 2011.
2. Информатика. Базовый курс. Стандарт третьего поколения: учебник для вузов / Под ред. С.В.Симоновича. 3-е изд. Санкт-Петербург, Издательство «Питер», 2013.
3. Гаврилов М., Климов В. Информатика и информационные технологии. Учебник. Москва, Издательство Юрайт, 2014
4. Kərimov S.Q., Sərdarov Y.B. Kompüter elminin nəzəri əsasları. /Dərslik/- Bakı, 2009. -290 s.

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

1. "The Baku Engineering University Mathematics and Computer Science" accepts original unpublished articles and reviews in the research field of the author.
2. Articles are accepted in English.
3. File format should be compatible with **Microsoft Word** and must be sent to the electronic mail (journal@beu.edu.az) of the Journal. The submitted article should follow the following format:
 - Article title, author's name and surname
 - The name of workplace
 - Mail address
 - Abstract and key words
4. The title of the article should be in each of the three languages of the abstract and should be centred on the page and in bold capitals before each summary.
5. **The abstract** should be written in **9 point** type size, between **100** and **150** words. The abstract should be written in the language of the text and in two more languages given above. The abstracts of the article written in each of the three languages should correspond to one another. The keywords should be written in two more languages besides the language of the article and should be at least three words.
6. **.UDC** and **PACS** index should be used in the article.
7. The article must consist of the followings:
 - Introduction
 - Research method and research
 - Discussion of research method and its results
 - In case the reference is in Russian it must be given in the Latin alphabet with the original language shown in brackets.
8. **Figures, pictures, graphics and tables** must be of publishing quality and inside the text. Figures, pictures and graphics should be captioned underneath, tables should be captioned above.
9. **References** should be given in square brackets in the text and listed according to the order inside the text at the end of the article. In order to cite the same reference twice or more, the appropriate pages should be given while keeping the numerical order. For example: [7, p.15].

Information about each of the given references should be full, clear and accurate. The bibliographic description of the reference should be cited according to its type (monograph, textbook, scientific research paper and etc.) While citing to scientific research articles, materials of symposiums, conferences and other popular scientific events, the name of the article, lecture or paper should be given.

Samples:

- a) **Article:** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure of monomer and dimeric conapeetes of carnosine with zinc*, Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010
 - b) **Book:** Christie John Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002
 - c) **Conference paper:** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. *Application of Information – Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions"*, Baki, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391
- References should be in 9-point type size.
10. The margins sizes of the page: - Top 2.8 cm. bottom 2.8 cm. left 2.5 cm, right 2.5 cm. The article main text should be written in Palatino Linotype 11 point type size single-spaced. Paragraph spacing should be 6 point.
 11. The maximum number of pages for an article should not exceed 15 pages
 12. The decision to publish a given article is made through the following procedures:
 - The article is sent to at least to experts.
 - The article is sent back to the author to make amendments upon the recommendations of referees.
 - After author makes amendments upon the recommendations of referees the article can be sent for the publication by the Editorial Board of the journal.

YAZI VƏ NƏŞR QAYDALARI

1. "Journal of Baku Engineering University- Riyaziyyat və kompüter elmləri" - əvvəllər nəşr olunmamış orijinal əsərləri və müəllifin tədqiqat sahəsi üzrə yazılmış icmal məqalələri qəbul edir.
2. Məqalələr İngilis dilində qəbul edilir.
3. Yazılar **Microsoft Word** yazı proqramında, (**journal@beu.edu.az**) ünvanına göndərməlidir. Göndərilən məqalələrdə aşağıdakılara nəzərə alınmalıdır:
 - Məqalənin başlığı, müəllifin adı, soyadı,
 - İş yeri,
 - Elektron ünvanı,
 - Xülasə və açar sözlər.
4. **Məqalədə başlıq hər xülasədən əvvəl** ortada, qara və böyük hərflə xülasələrin yazıldığı hər üç dildə olmalıdır.
5. **Xülasə** 100-150 söz aralığında olmaqla, 9 punto yazı tipi böyüklüyündə, məqalənin yazıldığı dildə və bundan əlavə yuxarıda göstərilən iki dildə olmalıdır. Məqalənin hər üç dildə yazılmış xülasəsi bir-birinin eyni olmalıdır. Açar sözlər uyğun xülasələrin sonunda onun yazıldığı dildə verilməklə ən azı üç sözdən ibarət olmalıdır.
6. Məqalədə UOT və PACS kodları göstərməlidir.
7. Məqalə aşağıdakılardan ibarət olmalıdır:
 - Giriş,
 - Tədqiqat metodu
 - Tədqiqat işinin müzakirəsi və onun nəticələri,
 - İstinad ədəbiyyatı rus dilində olduğu halda orijinal dili mötərzə içərisində göstərməklə yalnız Latın əlifbası ilə verilməlidir.
8. **Şəkil, rəsm, grafik və cədvəllər** çapda düzgün, aydın çıxacaq vəziyyətdə və mətn içərisində olmalıdır. Şəkil, rəsm və grafiklərin yazıları onların altında yazılmalıdır. Cədvəllərdə başlıq cədvəlin üstündə yazılmalıdır.
9. **Mənbələr** mətn içərisində kvadrat mötərizə daxilində göstərməklə məqalənin sonunda mətn daxilindəki sıra ilə düzülməlidir. Eyni mənbəyə iki və daha çox istinad edildikdə əvvəlki sıra sayı saxlanmaqla müvafiq səhifələr göstərməlidir. Məsələn: [7,səh.15].

Ədəbiyyat siyahısında verilən hər bir istinad haqqında məlumat tam və dəqiq olmalıdır. İstinad olunan mənbənin biblioqrafik təsviri onun növündən (monoqrafiya, dərslik, elmi məqalə və s.) asılı olaraq verilməlidir. Elmi məqalələrə, simpozium, konfrans, və digər nüfuzlu elmi tədbirlərin materiallarına və ya tezislərinə istinad edərkən məqalənin, məruzənin və ya tezisnin adı göstərməlidir.

Nümunələr:

- a) **Məqalə:** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure of monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc*, Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010
- b) **Kitab:** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, 2002
- c) **Konfrans:** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391

Mənbələr 9 punto yazı tipi böyüklüyündə olmalıdır.

10. **Səhifə ölçüləri:** üstədən 2.8 sm, altından 2.8 sm, soldan 2.5 sm və sağdan 2.5 sm olmalıdır. Mətn 11 punto yazı tipi böyüklüyündə, **Palatino Linotype** yazı tipi ilə və tək simvol aralığında yazılmalıdır. Paraqraflar arasında 6 punto yazı tipi aralığında məsafə olmalıdır.
11. Orijinal tədqiqat əsərlərinin tam mətni bir qayda olaraq 15 səhifədən artıq olmamalıdır.
12. Məqalənin nəşrə təqdimi aşağıdakı qaydada aparılır:
 - Hər məqalə ən azı iki ekspertə göndərilir.
 - Ekspertlərin tövsiyələrini nəzərə almaq üçün məqalə müəllifə göndərilir.
 - Məqalə, ekspertlərin tənqidi qeydləri müəllif tərəfindən nəzərə alındıqdan sonra Jurnalın Redaksiya Heyəti tərəfindən çapa təqdim oluna bilər.

YAZIM KURALLARI

1. “Journal of Baku Engineering University- Matematik ve Bilgisayar Bilimleri” önceler yayımlanmamış orijinal çalışmaları ve yazarın kendi araştırma alanın-da yazılmış derleme makaleleri kabul etmektedir.
2. Makaleler İngilizce kabul edilir.
3. Makaleler Microsoft Word yazı programında, (**journal@beu.edu.az**) adresine gönderilmelidir. Gönderilen makalelerde şunlar dikkate alınmalıdır:
 - Makalenin başlığı, yazarın adı, soyadı,
 - İş yeri,
 - E-posta adresi,
 - Özet ve anahtar kelimeler.
4. **Özet** 100-150 kelime arasında olup 9 font büyüklüğünde, makalenin yazıldığı dilde ve yukarıda belirtilen iki dilde olmalıdır. Makalenin her üç dilde yazılmış özeti birbirinin aynı olmalıdır. Anahtar kelimeler uygun özeti sonunda onun yazıldığı dilde verilmekle en az üç sözcükten oluşmalıdır.
5. Makalede UOT ve PACS tipli kodlar gösterilmelidir.
6. Makale şunlardan oluşmalıdır:
 - Giriş,
 - Araştırma yöntemi
 - Araştırma
 - Tartışma ve sonuçlar,
 - İstinat Edebiyatı Rusça olduğu halde orjinal dili parantez içerisinde göstermekle yalnız Latin alfabesi ile verilmelidir.
7. **Şekil, Resim, Grafik ve Tablolar** baskıda düzgün çıkacak nitelikte ve metin içerisinde olmalıdır. Şekil, Resim ve grafiklerin yazıları onların alt kısmında yer almalıdır. Tablolarda ise başlık, tablonun üst kısmında bulunmalıdır.
8. **Kullanılan kaynaklar**, metin dâhilinde köşeli parantez içerisinde numaralandırılmalı, aynı sırayla metin sonunda gösterilmelidir. Aynı kaynaklara tekrar başvurulduğunda sıra muhafaza edilmelidir. Örneğin: [7,seh.15]. Referans verilen her bir kaynağın künyesi tam ve kesin olmalıdır. Referans gösterilen kaynağın türü de eserin türüne (monografi, derslik, ilmi makale vs.) uygun olarak verilmelidir. İlmî makalelere, sempozyum, ve konferanslara müracaat ederken makalenin, bildirinin veya bildiri özetlerinin adı da gösterilmelidir.

Örnekler:

- a) **Makale:** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and Electronic Structure of Monomeric and Dimeric Conapeetes of Carnosine Üith Zinc*, Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010
- b) **Kitap:** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002
- c) **Kongre:** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. “*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions*”, Baki, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391

Kaynakların büyüklüğü 9 punto olmalıdır.

9. **Sayfa ölçüleri;** üst: 2.8 cm, alt: 2.8 cm, sol: 2.5 cm, sağ: 2.5 cm şeklinde olmalıdır. Metin 11 punto büyüklükte **Palatino Linotype** fontu ile ve tek aralıkta yazılmalıdır. Paragraflar arasında 6 puntoluk yazı mesafesinde olmalıdır.
10. Orijinal araştırma eserlerinin tam metni 15 sayfadan fazla olmamalıdır.
11. Makaleler dergi editör kurulunun kararı ile yayımlanır. Editörler makaleyi düzeltme için yazara geri gönderebilir.
12. Makalenin yayına sunuşu aşağıdaki şekilde yapılır:
 - Her makale en az iki uzmana gönderilir.
 - Uzmanların tavsiyelerini dikkate almak için makale yazara gönderilir.
 - Makale, uzmanların eleştirel notları yazar tarafından dikkate alındıktan sonra Derginin Yayın Kurulu tarafından yayına sunulabilir.
13. Azerbaycan dışından gönderilen ve yayımlanacak olan makaleler için,(derginin kendilerine gönderilmesi zamanı posta karşılığı) 30 ABD Doları veya karşılığı TL, T.C. Ziraat Bankası/Üsküdar-İstanbul 0403 0050 5917 No’lu hesaba yatırılmalı ve makbuzu üniversitemize fakslandmalıdır.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. «Journal of Baku Engineering University» - Математики и информатики публикует оригинальные, научные статьи из области исследования автора и ранее не опубликованные.
2. Статьи принимаются на английском языке.
3. Рукописи должны быть набраны согласно программы **Microsoft Word** и отправлены на электронный адрес (**journal@beu.edu.az**). Отправляемые статьи должны учитывать следующие правила:
 - Название статьи, имя и фамилия авторов
 - Место работы
 - Электронный адрес
 - Аннотация и ключевые слова
4. **Заглавие статьи** пишется для каждой аннотации заглавными буквами, жирными буквами и располагается по центру. Заглавие и аннотации должны быть представлены на трех языках.
5. **Аннотация**, написанная на языке представленной статьи, должна содержать 100-150 слов, набранных шрифтом 9 punto. Кроме того, представляются аннотации на двух других выше указанных языках, перевод которых соответствует содержанию оригинала. Ключевые слова должны быть представлены после каждой аннотации на его языке и содержать не менее 3-х слов.
6. В статье должны быть указаны коды UOT и PACS.
7. Представленные статьи должны содержать:
 - Введение
 - Метод исследования
 - Обсуждение результатов исследования и выводов.
 - Если ссылаются на работу на русском языке, тогда оригинальный язык указывается в скобках, а ссылка дается только на латинском алфавите.
8. **Рисунки, картинки, графики и таблицы** должны быть четко выполнены и размещены внутри статьи. Подписи к рисункам размещаются под рисунком, картинкой или графиком. Название таблицы пишется над таблицей.
9. **Ссылки** на источники даются в тексте цифрой в квадратных скобках и располагаются в конце статьи в порядке цитирования в тексте. Если на один и тот же источник ссылаются два и более раз, необходимо указать соответствующую страницу, сохраняя порядковый номер цитирования. Например: [7, стр.15]. Библиографическое описание ссылаемой литературы должно быть проведено с учетом типа источника (монография, учебник, научная статья и др.). При ссылке на научную статью, материалы симпозиума, конференции или других значимых научных мероприятий должны быть указаны название статьи, доклада или тезиса.

Например:

- a) **Статья:** Demukhamedova S.D., Aliyeva I.N., Godjayev N.M. *Spatial and electronic structure of monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc*, Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010
- b) **Книга:** Christie on Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, 2002
- c) **Конференция:** Sadychov F.S, Fydin C,Ahmedov A.I. Appligation of Information-Communication Nechnologies in Science and education. II International Conference. *"Higher Twist Effects In Photon-Proton Collision"*, Baki,01-03 Noyabr, 2007, ss.384-391

Список цитированной литературы набирается шрифтом 9 punto.

10. **Размеры страницы:** сверху 2.8 см, снизу 2.8 см, слева 2.5 и справа 2.5. Текст печатается шрифтом **Palatino Linotype**, размер шрифта 11 punto, интервал-одинарный. Параграфы должны быть разделены расстоянием, соответствующим интервалу 6 punto.
11. Полный объем оригинальной статьи, как правило, не должен превышать 15 страниц.
12. Представление статьи к печати производится в ниже указанном порядке:
 - Каждая статья посылается не менее двум экспертам.
 - Статья посылается автору для учета замечаний экспертов.
 - Статья, после того, как автор учел замечания экспертов, редакционной коллегией журнала может быть рекомендована к печати.