

ISSN 2521-635X

Volume 2
Number 1

2018

Journal of Baku Engineering University

**MATHEMATICS AND
COMPUTER SCIENCE**

Journal is published twice a year
Number - 1. June, Number - 2. December

An International Journal

<http://journal.beu.edu.az>

Founder

Havar Mammadov

Editor-in-chief

Niftali Qocayev

Co-Editors

Hamzaga Orucov

Agasi Melikov

Editorial advisory board

Alekber Aliyev (Azerbaijan, Baku State University)

Abzeddin Adamov (Azerbaijan, ADA)

Gorbachuk Valentina Ivanovna (Ukraina, Academy of Science)

Hamdulla Aslanov (Azerbaijan, Akademy of Science)

Khalil Ismailov (Azerbaijan, BANM)

Nadir Agayev (Azerbaijan, Aviasiya University)

Rakib Efendiye (Azerbaijan, Baku State University)

Sosnin Petr Ivanovich (Russia, Ulyanovsk State Technical University)

Vaqif Quliyev (Azerbaijan, Akademy of Science)

International Advisory board

Abdeljalil Nachaoui (France, Nantes University)

Bariş Erbaş, (Anadolu University, Turkey)

Che Soong Kim (Koreya, Sangji University)

Chakib Abdelkrim, (Morocco, BeniMellal University)

FeodorRofo-Beketov, (Ukraine, Kharkov)

Garib Murshudov (York Academy, UK, London)

Gorbarchuk Vladimir Ivanovich (Poland, Lyubel Polytechnic University)

Golovko Vladimir Adamovich (Belarus, Brest State Universiteti)

Hamed Sari-Sarraf (USA, TexasTechnik University)

Hari Srivastava (Canada, Victoria,)

Jauberteau Francois (France, Nantes University)

Krivosos Yuriy Georgievich (Ukraine, Academy of Science)

Ludmila Prikazchikova, (Keele University, England)

Mourad Nachaoui, (France, Nantes University)

Nadir Alisov (Ukraine, Academy of Science)

Rasim Alikuliyev (Azerbaijan, National Academy of Science)

Ramiz Alikuliyev (Azerbaijan, National Academy of Science)

Tarasenko Vladimir Petrovich (National Technical University of Ukraine)

Telman Aliyev (Azerbaijan, National Academy of Science)

Vedat Coşkun (Turkiye, Işık University)

Vladimir B. Vasilyev, (Russia, Lipetsk State Technical University)

Executive Editors

Shafag Alizade

Assistant Editors

Svetlana Denmuhammedovna

Design

Ilham Aliyev

Contact address

Journal of Baku Engineering University

AZ0102, Khirdalan city, Hasan Aliyev str. 120, Absheron, Baku, Azerbaijan

Tel: 00 994 12 - 349 99 95 Fax: 00 994 12 349-99-90/91

e-mail: journal@beu.edu.az

web: <http://journal.qu.edu.az>

facebook: [Journal Of Baku Engineering University](#)

Copyright © Baku Engineering University

ISSN 2521-635X

ISSN 2521-635X



Journal of Baku Engineering University

**MATHEMATICS AND
COMPUTER SCIENCE**

Baku - AZERBAIJAN

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

2018. Volume 2, Number 1

CONTENTS

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТРАНСФОРМАТОРА СТЕРЖНЕВОГО ТИПА

Олег Петрищев, Константин Базило, Эмиль Фауре _____ 3

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ГУРСА-ДАРБУ

К.Б. Мансимов, В.А. Сулейманова _____ 19

ORTHOGONALITY RELATION FOR THE CHARLIER POLYNOMIALS WITH RESPECT TO THE CONTINUOUS MEASURE

G.H. Guliyeva, E.I. Jafarov, A.M. Jafarova _____ 31

THE SYSTEM OF DEGENERATE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PARAMETERS

Hummet K. Musaev _____ 36

О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ИЗ ГРАНД ГРАНД ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА-МОРРИ

Алик М. Наджафов, Саин Т. Алекберли _____ 46

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г.И. Заманов _____ 52

УДК: 621.373.826.032:534.232.082.73PACS : 77.65.Bn, 62.20.dq

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТРАНСФОРМАТОРА СТЕРЖНЕВОГО ТИПА

Олег ПЕТРИЩЕВ¹, Константин БАЗИЛО², Эмиль ФАУРЕ²

¹Государственное предприятие «Киевский государственный
научно-исследовательский институт гидроприборов»

Киев / УКРАИНА

²Черкасский государственный технологический университет

Черкассы / УКРАИНА

b_constantine@ukr.net

РЕЗЮМЕ

Актуальность применения различных функциональных элементов пьезоэлектроники в силовых и информационных системах объясняется, прежде всего, их высокой надежностью, а также малыми габаритами и весом, что в значительной мере облегчает решение проблемы миниатюризации таких систем. В настоящее время существует потребность в создании целостной методики построения математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов, которая могла бы использоваться как теоретическая основа расчета их характеристик и параметров. В работе построена математическая модель пьезоэлектрического трансформатора стержневого типа, показаны основные особенности математического моделирования пьезоэлектрических трансформаторов, рассмотрена простейшая конструкция трансформатора в виде призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением, изготовленного из пьезокерамики, определены выражения для расчета коэффициента трансформации и амплитудного значения потенциалов на электродах пьезоэлектрического трансформатора стержневого типа.

Ключевые слова: пьезоэлектрический элемент, стержень, математическая модель.

THE CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL MODEL OF ROD TYPE PIEZOELECTRIC TRANSFORMER

ABSTRACT

The relevance of the use of various functional elements of piezoelectronics in power and informational systems is explained, first of all, by their high reliability, as well as small dimensions and weight, which greatly facilitates the solution of the problem of miniaturization of such systems. Currently, there are no reliable and valid methods of constructing of mathematical models of piezoelectric transformers, which could be used as a theoretical basis for characteristics and parameters calculating of this class of functional elements of modern piezoelectronics. The main result of this article can be fixed as follows: mathematical model of rod type piezoelectric transformer is obtained, the simplest construction of rod type piezoelectric transformer with a rectangular cross section is considered, expressions for calculating the transformation ratio and amplitude values of potentials on the electrodes of rod type piezoelectric transformer are defined.

Keywords: piezoelectric element, rod, mathematical model.

1. Введение

Актуальность применения различных функциональных элементов пьезоэлектроники в силовых и информационных системах объясняется, прежде всего, их высокой надежностью [1] – интенсивность отказов составляет 10^{-6} , т. е. сопоставима с показателями надежности интегральных микросхем, а также малыми габаритами и весом, что в значительной мере облегчает решение проблемы миниатюризации таких систем.

Построению и исследованию математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов посвящено немало публикаций. Начиная с монографии [2], основы расчета передаточных характеристик пьезоэлектрических трансформаторов рассматривались, например, в работах [3–6]. Однако рассмотренные работы не объединены каким-либо системным подходом, имеют характер разрозненных эпизодов, на основании чего можно утверждать, что в настоящее время существует потребность в создании целостной методики построения математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов, которая могла бы использоваться в качестве теоретической основы расчета их характеристик и параметров.

Таким образом, актуальность разработки физически содержательных математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов сохраняется и в настоящее время.

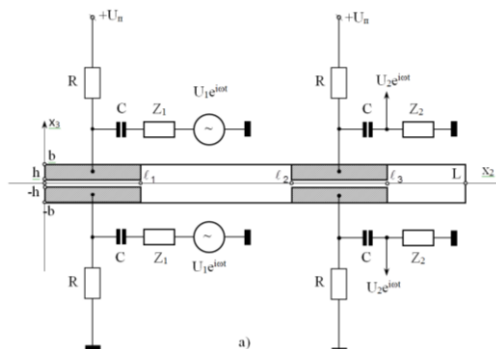
Целью данной работы является построение математической модели пьезоэлектрического трансформатора стержневого типа.

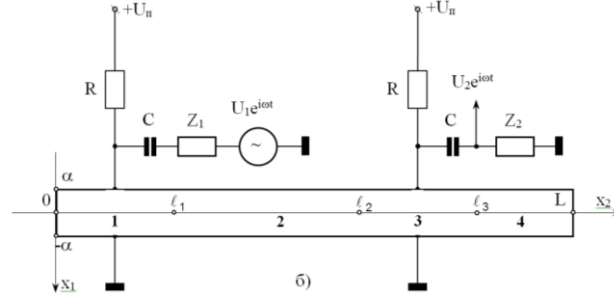
2. Метод исследования и результаты

Рассмотрим конструкцию стержневого пьезоэлектрического трансформатора (рис. 1). На рис. 1,а показан вид на стержневой трансформатор сбоку, с острия координатной оси Ox_1 правосторонней декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3) . На рис. 1,б показан вид на стержень с острия оси Ox_3 (вид сверху). Схема подключения электродов (заштрихованные поверхности на рис. 1,а) на участке стержня $0 \leq x_2 \leq \ell_1$ показана на рис. 2,а. На рис. 2,б и рис. 2,в показан (ориентировочно) характер изменения постоянного и переменного электрического поля по высоте поперечного сечения стержня. Призматический стержень изготовлен из сегнетоэлектрика, т. е. из не поляризованной пьезокерамики типа ЦТС.

Четыре электрода, расположенные парами на боковых поверхностях $x_1 = \pm a$ сегнетоэлектрического стержня образуют электродную группу первичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора. На эти электроды подается (рис. 2,а) постоянное, поляризующее сегнетоэлектрик, электрическое напряжение U_n , которое формирует в области $0 \leq x_2 \leq \ell_1$ (область №1 на рис. 1,б) постоянное электрическое поле. Характер изменения напряженности поляризующего сегнетоэлектрик электрического поля показан на рис. 2,б. Для того, чтобы надежно обеспечить равенство нулю компонента E_1^0 вектора напряженности поляризующего электрического поля в промежутке $-h \leq x_3 \leq h$ (рис. 2,а), необходимо в этом промежутке разместить на поверхностях $x_1 = \pm a$ электроды, закороченные на общую шину.

Рис. 1. Схематическое изображение конструкции стержневого пьезоэлектрического трансформатора на изгибных колебаниях





В результате электрической поляризации сегнетоэлектрический стержень на участке №1 приобретает свойства пьезоэлектрика со следующим набором материальных констант:

– матрица модулей упругости $c_{\beta\lambda}^{(\pm)}$ (β, λ – индексы Фойгта)

$$\left| c_{\beta\lambda}^{(\pm)} \right| = \begin{pmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44}^E & 0 & 0 \\ & & & & c_{55}^E & 0 \\ & & & & & c_{66}^E \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где знак плюс в верхнем правом индексе соответствует области $x_3 > 0$, а знак минус – области $x_3 < 0$; $c_{11}^E \neq c_{22}^E = c_{33}^E$; $c_{12}^E = c_{13}^E = c_{23}^E$; $c_{44}^E = (c_{22}^E - c_{23}^E)/2$; $c_{55}^E = c_{66}^E$.

– матрица пьезоэлектрических модулей $e_{k\beta}^{(\pm)}$ (β – индекс Фойгта)

$$\left| e_{k\beta}^{(\pm)} \right| = \pm \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{35} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $e_{11} \neq e_{12} = e_{13}$; $e_{26} = e_{35} = (e_{11} - e_{12})/2$.

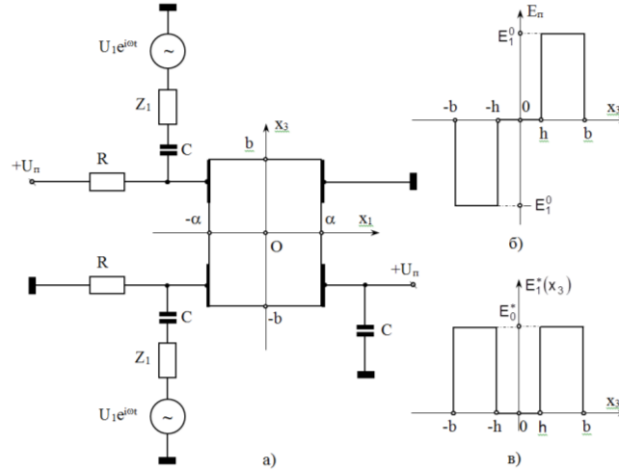
– матрица диэлектрических проницаемостей χ_{ij}^{ε}

$$\left| \chi_{ij}^{\varepsilon} \right| = \begin{pmatrix} \chi_{11}^{\varepsilon} & 0 & 0 \\ & \chi_{22}^{\varepsilon} & 0 \\ & & \chi_{33}^{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $\chi_{11}^{\varepsilon} \neq \chi_{22}^{\varepsilon} = \chi_{33}^{\varepsilon}$.

На участках №2 и №4 (рис. 1,б), где поверхности сегнетоэлектрического стержня не покрыты электродами, пьезоактивный материал стержня является изотропным по упругим и электрическим свойствам. При этом матрицы модулей упругости и сегнетоэлектрических констант являются матрицами изотропных тензоров четвертого ранга, тензор диэлектрической проницаемости определяется одной константой χ^{ε} , компоненты тензора пьезоэлектрических констант, естественно, равны нулю. Так как изотропный тензор четвертого ранга в общем случае полностью определяется двумя константами

Рис. 2. Схема подключения источников постоянного и переменного потенциалов к электродам первичной электрической цепи (а) и распределение по высоте поперечного сечения постоянного (б) и амплитудного значения переменного (в) электрических полей



A и B , а произвольный его компонент T_{ijkl} находится по формуле $T_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$, где $\delta_{ij}, \dots, \delta_{jk}$ – символы Кронекера, то матрицы модулей упругости $c_{ijkl} = c_{\beta\lambda}$ и электрострикционных констант $e_{ijkl} = e_{\beta\lambda}$ имеют следующий вид

$$|c_{\beta\lambda}| = \begin{vmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{vmatrix}, \quad (4)$$

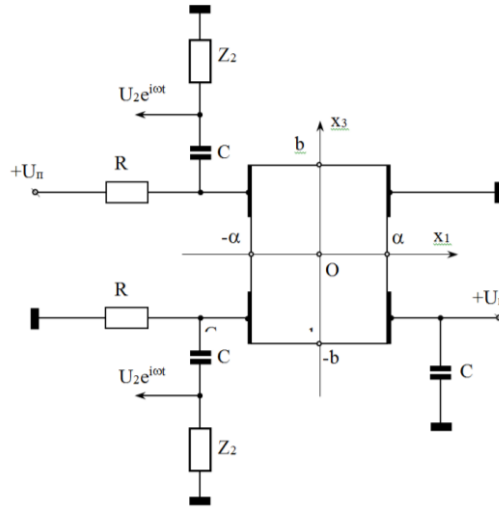
$$|e_{\beta\lambda}| = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ & e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & (e_1 - e_2)/2 & 0 & 0 \\ & & & & (e_1 - e_2)/2 & 0 \\ & & & & & (e_1 - e_2)/2 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

где λ – модуль объемной упругости; G – модуль сдвига; e_1 и e_2 – электрострикционные константы. Числовые значения материальных констант λ , G , e_1 и e_2 определяются экспериментально.

На участке №3 электродная группа вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора должна обеспечивать эффективную регистрацию того типа упругих колебаний, который формируется электродной группой первичной электрической цепи в области №1. Это возможно в том случае, когда поляризация сегнетоэлектрика постоянным электрическим полем в области №3 совпадает (с точностью до знака) с его поляризацией в области №1. На рис. 3 показано подключение источников постоянного электрического поля и электрических нагрузок Z_2 к электродам вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора.

Необходимо подчеркнуть то обстоятельство, что любая другая конфигурация поляризующего сегнетоэлектрик постоянного электрического поля, т. е. любая другая конструкция электродной группы, не обеспечит эффективной регистрации возбуждаемых на участке №1 упругих колебаний и, как следствие, не обеспечит нормальной работы пьезоэлектрического трансформатора. Говоря иными словами, для обеспечения эффективной работы пьезоэлектрического трансформатора необходимо и достаточно, чтобы конструкции источника и приемника упругих колебаний были подобны и физически эквивалентны друг другу.

Рис. 3. Схема подключения источников постоянного и переменного потенциалов к электродам вторичной электрической цепи на участке №3



Таким образом, физико-механические свойства поляризованного сегнетоэлектрика в области №3 при условии равенства потенциалов U_n источников поляризующего сегнетоэлектрик постоянного электрического поля, описываются модулями упругости с матрицей (1), пьезоэлектрическими модулями с матрицей (2) и диэлектрической проницаемостью с матрицей (3).

На участках №1 и №3, где поляризованный сегнетоэлектрик проявляет свойства пьезоэлектрика, обобщенный закон Гука

$${}^{(n)}\sigma_{ij}^{(\pm)} = {}^{(n)}c_{ijkl}^{(\pm)} {}^{(n)}\epsilon_{kl}^{(\pm)} - {}^{(n)}e_{kij}^{(\pm)} {}^{(n)}\tilde{E}_k^{(\pm)},$$

где ${}^{(n)}\sigma_{ij}^{(\pm)}$ – амплитудное значение компонента тензора результирующих механических напряжений в верхней (знак плюс) и нижней (знак минус) частях n -го участка ($n = 1, 3$) сегнетоэлектрического стержня; ${}^{(n)}c_{ijkl}^{(\pm)}$ – компонент тензора модулей упругости n -ой области; ${}^{(n)}\epsilon_{ij}^{(\pm)}$ – амплитудное значение компонента тензора бесконечно малых деформаций; ${}^{(n)}e_{kij}^{(\pm)}$ – компонент тензора пьезоэлектрических модулей; ${}^{(n)}\tilde{E}_k^{(\pm)}$ – k -ый компонент вектора напряженности электрического поля в деформируемом пьезоэлектрике.

На участках с четными номерами $m = 2, 4$ в пренебрежении электрострикционными эффектами, которые в десятки раз меньше пьезоэлектрических по своему проявлению, можно записать, что ${}^{(m)}\sigma_{ij}^{(\pm)} = {}^{(m)}c_{ijkl}^{(\pm)} {}^{(m)}\epsilon_{kl}^{(\pm)}$.

Полагая, что сдвиговые напряжения и деформации в стержне не наблюдаются, из приведенных выше определений обобщенного закона Гука можно записать соотношения, которые определяют напряжения сжатия-растяжения вдоль координатных осей Ox_1 , Ox_2 и Ox_3 :

$$^{(n)}\sigma_{11}^{(\pm)} = c_{11}^E {}^{(n)}\varepsilon_{11}^{(\pm)} + c_{12}^E {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} + c_{12}^E {}^{(n)}\varepsilon_{33}^{(\pm)} \mp e_{11} {}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}, \quad (6)$$

$$^{(n)}\sigma_{22}^{(\pm)} = c_{12}^E {}^{(n)}\varepsilon_{11}^{(\pm)} + c_{22}^E {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} + c_{12}^E {}^{(n)}\varepsilon_{33}^{(\pm)} \mp e_{12} {}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}, \quad (7)$$

$$^{(n)}\sigma_{33}^{(\pm)} = c_{12}^E {}^{(n)}\varepsilon_{11}^{(\pm)} + c_{12}^E {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} + c_{22}^E {}^{(n)}\varepsilon_{33}^{(\pm)} \mp e_{12} {}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}. \quad (8)$$

При записи соотношений (6) – (8) одинаковые по величине материальные константы обозначены, как это принято в механике деформируемого твердого тела, одинаковыми символами.

Для областей с четными номерами $m = 2, 4$

$$^{(m)}\sigma_{11}^{(\pm)} = (\lambda + 2G) {}^{(m)}\varepsilon_{11}^{(\pm)} + \lambda {}^{(m)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} + \lambda {}^{(m)}\varepsilon_{33}^{(\pm)}, \quad (9)$$

$$^{(m)}\sigma_{22}^{(\pm)} = \lambda {}^{(m)}\varepsilon_{11}^{(\pm)} + (\lambda + 2G) {}^{(m)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} + \lambda {}^{(m)}\varepsilon_{33}^{(\pm)}, \quad (10)$$

$$^{(m)}\sigma_{33}^{(\pm)} = \lambda {}^{(m)}\varepsilon_{11}^{(\pm)} + \lambda {}^{(m)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} + (\lambda + 2G) {}^{(m)}\varepsilon_{33}^{(\pm)}, \quad (11)$$

где $^{(k)}\varepsilon_{11}^{(\pm)}$, $^{(k)}\varepsilon_{22}^{(\pm)}$ и $^{(k)}\varepsilon_{33}^{(\pm)}$ ($k = n, m$) – деформации сжатия-растяжения вдоль координатных осей Ox_1 , Ox_2 и Ox_3 в верхней ($x_3 > 0$, знак плюс) и нижней ($x_3 < 0$, знак минус) частях k -ой области сегнетоэлектрического стержня.

Предположим, что частота смены знака электрического потенциала в первичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора такова, что длина волны упругих колебаний в сегнетоэлектрическом стержне соизмерима с его длиной L и, по определению, существенно превышает наибольший размер его поперечного сечения. Поскольку длина волны является масштабной единицей при описании пространственного распределения напряженно-деформированного состояния деформируемого твердого тела, постольку можно утверждать, что в данном диапазоне частот числовые значения напряжений сжатия-растяжения не изменяются в плоскости поперечного сечения стержня.

Будем полагать, что поверхности стержня $x_1 = \pm a$ и $x_3 = \pm b$ не контактируют с другими материальными объектами, т. е. отсутствует противодействие со стороны окружающей стержень среды. Из третьего закона Ньютона следует, что на этих поверхностях должны выполняться следующие условия:

$$^{(k)}\sigma_{11}^{(\pm)} \Big|_{x_1 = \pm a} = 0, \quad ^{(k)}\sigma_{33}^{(\pm)} \Big|_{x_3 = \pm b} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (12)$$

Принимая во внимание сказанное выше, можно утверждать, что

$$^{(k)}\sigma_{11}^{(\pm)} = ^{(k)}\sigma_{33}^{(\pm)} = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (13)$$

где V – объем призматического стержня.

Приравнивая нулю левые части соотношений (6) и (8), получаем возможность определения деформаций ${}^{(n)}\varepsilon_{11}^{(\pm)}$ и ${}^{(n)}\varepsilon_{33}^{(\pm)}$ через продольную деформацию сжатия-растяжения ${}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)}$. При этом

$$\begin{aligned} {}^{(n)}\varepsilon_{11}^{(\pm)} &= -\frac{c_{12}^E}{\Delta_0} \left(c_{22}^E - c_{12}^E \right) {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} \pm \frac{1}{\Delta_0} \left(e_{11}c_{22}^E - e_{12}c_{12}^E \right) {}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}, \\ {}^{(n)}\varepsilon_{33}^{(\pm)} &= -\frac{c_{12}^E}{\Delta_0} \left(c_{11}^E - c_{12}^E \right) {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} \mp \frac{1}{\Delta_0} \left(e_{11}c_{12}^E - e_{12}c_{11}^E \right) {}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{где } \Delta_0 = c_{11}^E c_{22}^E - \left(c_{12}^E \right)^2.$$

Подставляя определения (14) в соотношение (7), получаем следующий результат

$${}^{(n)}\sigma_{22}^{(\pm)} = Y_E {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} \mp e_{12}^* {}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}, \quad (15)$$

где Y_E и e_{12}^* – модуль упругости и эффективный пьезомодуль для режима одноосного деформирования сегнетоэлектрического стержня на участках с нечетными номерами n . Числовые значения этих материальных констант определяются следующими формулами:

$$Y_E = \frac{1}{\Delta_0} \left\{ -2 \left(c_{12}^E \right)^2 c_{22}^E + 2 \left(c_{12}^E \right)^3 + c_{11}^E \left[\left(c_{22}^E \right)^2 - \left(c_{12}^E \right)^2 \right] \right\}; \quad e_{12}^* = \frac{c_{22}^E - c_{12}^E}{\Delta_0} \left(e_{12}c_{11}^E - e_{11}c_{12}^E \right).$$

Для областей стержня с номерами 2 и 4 обобщенный закон Гука (9) – (11) в случае одноосного сжатия-растяжения вдоль оси Ox_2 записывается в следующем виде

$${}^{(m)}\sigma_{22}^{(\pm)} = Y {}^{(m)}\varepsilon_{22}^{(\pm)}, \quad (16)$$

где $Y = 2G(1 + \nu)$; $\nu = \lambda / [2(\lambda + G)]$ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона изотропных по упругим свойствам областей номера $m = 2, 4$.

Электрическое состояние поляризованных постоянным электрическим полем областей №1 и №3 сегнетоэлектрического стержня определяет закон электрической поляризации диэлектрика с пьезоэлектрическими свойствами ${}^{(n)}D_k^{(\pm)} = \pm e_{kij}^{(\pm)} {}^{(n)}\varepsilon_{ij}^{(\pm)} + \chi_{kj}^\varepsilon {}^{(n)}\tilde{E}_j^{(\pm)}$. Общая формулировка, определяющая k -ый компонент вектора электрической индукции в n -ом участке, доставляет следующее соотношение

$${}^{(n)}D_1^{(\pm)} = \pm e_{11} {}^{(n)}\varepsilon_{11}^{(\pm)} \pm e_{12} \left[{}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} + {}^{(n)}\varepsilon_{33}^{(\pm)} \right] + \chi_{11}^\varepsilon {}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}, \quad (17)$$

где ${}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}$ – амплитудное значение поперечного компонента вектора напряженности результирующего электрического поля в n -ой области стержня. Достаточно просто показать, что на этих участках стержня ${}^{(n)}D_2^{(\pm)} = {}^{(n)}D_3^{(\pm)} = 0$.

Подставляя в соотношение (17) определения деформаций ${}^{(n)}\varepsilon_{11}^{(\pm)}$ и ${}^{(n)}\varepsilon_{33}^{(\pm)}$, получаем

$${}^{(n)}D_1^{(\pm)} = \pm e_{12}^* {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} + \chi_{11}^\varepsilon {}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}, \quad (18)$$

где пьезомодуль e_{12}^* указан в комментариях к формуле (15), а χ_{11}^σ – диэлектрическая проницаемость поляризованного сегнетоэлектрика для режима постоянства (равенства нулю) нормальных напряжений $^{(n)}\sigma_{11}^{(\pm)}$ и $^{(n)}\sigma_{33}^{(\pm)}$. Числовые значения диэлектрической проницаемости χ_{11}^σ рассчитываются по следующей формуле

$$\chi_{11}^\sigma = \chi_{11}^\varepsilon + \frac{1}{\Delta_0} \left[e_{11}^2 c_{22}^E + e_{12}^2 c_{11}^E - 2e_{11}e_{12}c_{12}^E \right].$$

Потребуем, чтобы на всех участках сегнетоэлектрического стержня выполнялось условие отсутствия свободных носителей электричества, т. е. условие

$$\text{div } \vec{D}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (19)$$

На участках №2 и №4 это условие выполняется автоматически, поскольку в пренебрежении сегнетоэлектрическими эффектами можно полагать, что на этих участках $\vec{D}^{(m)} \cong 0$. Условие (19) на участках №1 и №3 будет выполняться лишь в том случае, когда в обязательном порядке выполняется условие

$$\frac{\partial D_1^{(n)}}{\partial x_1} = 0. \quad (20)$$

Так как в области частот до 10 МГц в динамически деформируемом пьезоэлектрике практически отсутствует магнитное поле [8], то справедливо определение $\vec{\tilde{E}} = -\text{grad } \Phi$, где $\vec{\tilde{E}}$ и Φ – вектор напряженности и скалярный потенциал электрического поля в объеме деформируемого пьезоэлектрика. С учетом этого можно записать выражение (18) в следующем виде

$$^{(n)}D_1^{(\pm)} = \pm e_{12}^* {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} - \chi_{11}^\sigma \frac{\partial \Phi_{(n)}^{(\pm)}}{\partial x_1}, \quad (21)$$

где $\Phi_{(n)}^{(\pm)}$ – скалярный потенциал электрического поля в n -ой области. Интегрируя левую и правую части соотношения (21) по переменной x_1 , получаем, с учетом условия (20), следующий результат

$$2\alpha {}^{(n)}D_1^{(\pm)} = \pm 2\alpha e_{12}^* {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} - \chi_{11}^\sigma \left[\Phi_{(n)}^{(\pm)}(\alpha) - \Phi_{(n)}^{(\pm)}(-\alpha) \right]. \quad (22)$$

Из показанных на рис. 2 и рис. 3 схем включения источника изменяющейся во времени разности электрических потенциалов $U_1 e^{i\omega t}$ и электрических нагрузок Z_2 следует, что $\Phi_{(n)}^{(\pm)}(\alpha) = 0$, а $\Phi_{(n)}^{(\pm)}(-\alpha) = U_{(n)}^{(\pm)}$. Очевидно, что амплитудные значения потенциалов $U_{(n)}^{(\pm)}$ определяются следующим образом: $U_{(1)}^{(\pm)} = U_0^{(\pm)}$ и $U_{(3)}^{(\pm)} = U_2^{(\pm)}$. При этом

$$U_0^{(\pm)} = \frac{U_1 Z_{(1)}^{(\pm)}}{Z_1 + Z_{(1)}^{(\pm)}}, \quad (23)$$

где Z_1 – выходной электрический импеданс источника переменного электрического напряжения; $Z_{(1)}^{(\pm)}$ – электрический импеданс верхней и нижней части участка №1 сегнетоэлектрического стержня.

С учетом сформулированных определений выражение (22) можно представить в следующем виде

$$^{(n)}D_1^{(\pm)} = \pm e_{12}^* {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} + \chi_{11}^\sigma \frac{U_{(n)}^{(\pm)}}{2\alpha}. \quad (24)$$

Определения (18) и (24) компонентов вектора электрической индукции физически эквивалентны и поэтому правые части этих соотношений должны быть равны друг другу. Сопоставляя правые части выражений (18) и (24), приходим к выводу, что

$$^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)} = \frac{U_{(n)}^{(\pm)}}{2\alpha}. \quad (25)$$

После того, как определены в явном виде величины $^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}$, соотношение (25) принимает следующий вид

$$^{(n)}\sigma_{22}^{(\pm)} = Y_E {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} \mp e_{12}^* \frac{U_{(n)}^{(\pm)}}{2\alpha}, \quad (26)$$

Определим тип напряженно-деформированного состояния, которое возникает в показанном на рис. 1 стержне.

Предположим, что торец стержня $x_2 = 0$ не имеет механических контактов с другими материальными объектами. Это означает, что $^{(1)}\sigma_{22}^{(\pm)} \Big|_{x_2=0} = 0$.

Приравнявая нулю левую часть определения (26), получаем следующий результат

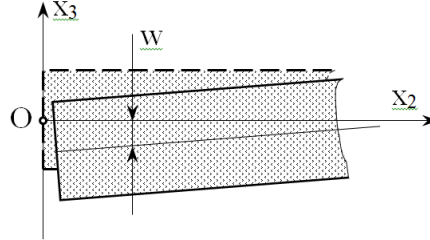
$$^{(1)}\varepsilon_{22}^{(\pm)}(0) = \pm \frac{e_{12}^* U_0^{(\pm)}}{2\alpha Y_E}. \quad (27)$$

Если обеспечить выполнение условия $U_0^{(\pm)} = U_0$, что, собственно, и заложено в схему включения (см. рис. 2), то из равенства (27) следует, что $^{(1)}\varepsilon_{22}^{(\pm)}(0) = \pm \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = e_{12}^* U_0 / (2\alpha Y_E)$. Если вспомнить, что продольная деформация $\varepsilon_{22} = \lim_{\ell \rightarrow 0} (\Delta \ell / \ell)$, где $\Delta \ell$ – изменение длины, а ℓ – первоначальная длина деформируемого объекта, то становится совершенно очевидным, что при показанном на рис. 2 подключении переменной разности электрических потенциалов верхние слои ($x_3 > 0$) сегнетоэлектрического стержня растягиваются, а нижние ($x_3 < 0$) – напротив, сжимаются. При этом прямолинейная ось призматического стержня отклоняется от первоначального (равновесного) положения так, как это показано на рис. 4. Академик Писаренко Г. С. [9] определяет изгиб как деформированное состояние, при котором искривляется ось прямолинейного стержня или изменяется кривизна оси криволинейного стержня. Принимая во внимание сформулированный выше классификационный признак, можно утверждать, что на первом участке сегнетоэлектрического стержня формируется напряженно-деформированное состояние поперечного изгиба, которое через упругие связи распространяется на все без исключения участки показанного на рис. 1 призматического стержня.

Основной кинематической характеристикой поперечного изгиба является так называемый прогиб, который на рис. 4 обозначен символом w . В случае прямолинейного стержня прогиб w численно равен расстоянию между срединной плоскостью изогну-

того и недеформированного стержня. Знак прогиба определяется знаком его проекции на ось Ox_3 (в общем случае – на плоскость x_1Ox_3) неподвижной системы координат x_1, x_2, x_3 . В случае динамического прямого изгиба призматического прямолинейного стержня прогиб удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

Рис. 4. К определению основной кинематической характеристики поперечного изгиба



$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} - \omega^2 \frac{\rho_0 S}{Y J_1} w = 0, \quad (28)$$

где ω – круговая частота смены знака прогиба в сечении $x_2 = \text{const}$; ρ_0 и Y – плотность и модуль Юнга материала стержня; S и J_1 – площадь и момент инерции поперечного сечения относительно главной центральной оси Ox_1 – геометрическая характеристика поперечного сечения [9]. В нашем случае $S = 4ab$, $J_1 = 4ab^3/3$. С учетом сказанного выше, уравнение (28) установившихся гармонических колебаний поперечного изгиба можно записать в следующем виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} - \lambda^4 w = 0, \quad (29)$$

где $\lambda = \sqrt[4]{3\rho_0\omega^2/(Yb^2)}$ – волновое число гармонических колебаний поперечного изгиба призматического стержня прямоугольного поперечного сечения.

Применительно к рассматриваемому стержню, расчетная схема которого показана на рис. 1, уравнение (29) следует записать в виде

$$\frac{\partial^4 w_k}{\partial x_2^4} - \lambda_k^4 w_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (30)$$

где w_k и $\lambda_k = \sqrt[4]{3\rho_0\omega^2/(Y_k b^2)}$ – прогиб и волновое число на k -ом участке сегнетоэлектрического стержня.

Общее решение уравнения (29) записывается следующим образом

$$w(x_2) = A_1 \sin \lambda x_2 + A_2 \cos \lambda x_2 + A_3 \operatorname{sh} \lambda x_2 + A_4 \operatorname{ch} \lambda x_2, \quad (31)$$

где $A_1, \dots, A_4$ – подлежащие определению константы.

Выпишем в явном виде общие решения (31) для каждого участка призматического стержня

$$w_1(x_2) = A_1 \sin \lambda_1 x_2 + A_2 \cos \lambda_1 x_2 + A_3 \operatorname{sh} \lambda_1 x_2 + A_4 \operatorname{ch} \lambda_1 x_2,$$

$$w_2(x_2) = A_5 \sin \lambda_2 x_2 + A_6 \cos \lambda_2 x_2 + A_7 \operatorname{sh} \lambda_2 x_2 + A_8 \operatorname{ch} \lambda_2 x_2,$$

$$\begin{aligned} w_3(x_2) &= A_9 \sin \lambda_1 x_2 + A_{10} \cos \lambda_1 x_2 + A_{11} sh \lambda_1 x_2 + A_{12} ch \lambda_1 x_2, \\ w_4(x_2) &= A_{13} \sin \lambda_2 x_2 + A_{14} \cos \lambda_2 x_2 + A_{15} sh \lambda_2 x_2 + A_{16} ch \lambda_2 x_2, \end{aligned} \quad (32)$$

где $A_1, \dots, A_{16}$ - подлежащие определению константы (шестнадцать штук); $\lambda_1 = \sqrt[4]{3\rho_0 \omega^2 / (Y_E b^2)}$; $\lambda_2 = \sqrt[4]{3\rho_0 \omega^2 / (Y b^2)}$.

На условных границах разделов участков стержня, т. е. в сечениях $x_2 = \ell_1; \ell_2; \ell_3$ должны выполняться условия сопряжения напряженно-деформированного состояния, которые в рамках модельных представлений поперечного изгиба формулируются следующим образом:

$$w_j(\ell_j) = w_{j+1}(\ell_j), \quad (33)$$

$$\vartheta_j(\ell_j) = \vartheta_{j+1}(\ell_j), \quad (34)$$

$$M_u^{(j)}(\ell_j) = M_u^{(j+1)}(\ell_j), \quad (35)$$

$$Q^{(j)}(\ell_j) = Q^{(j+1)}(\ell_j), \quad (36)$$

где $\vartheta_j(x_2)$ – угол поворота плоского поперечного сечения на j -ом участке стержня; $M_u^{(j)}(x_2)$ и $Q^{(j)}(x_2)$ – изгибающий момент и поперечная сила на j -ом участке. Интегральные характеристики напряженного состояния при поперечном изгибе, т. е. Величины $M_u^{(j)}(x_2)$ и $Q^{(j)}(x_2)$ определяются следующими выражениями:

$$M_u^{(j)}(x_2) = \int_S \sigma_{22}^{(j)}(x_2) x_3 dS, \quad (37)$$

$$Q^{(j)}(x_2) = \frac{\partial M_u^{(j)}(x_2)}{\partial x_2}, \quad (38)$$

где $\sigma_{22}^{(j)}(x_2)$ – напряжение сжатия-растяжения на j -ом участке сегнетоэлектрического стержня.

Угол поворота $\vartheta_j(x_2)$ поперечного сечения стержня определяется из модельного представления о поперечном изгибе следующим образом

$$\vartheta_j(x_2) = \frac{\partial w_j(x_2)}{\partial x_2}. \quad (39)$$

Возникающие при поперечном изгибе деформации сжатия-растяжения ${}^{(j)}\epsilon_{22}^{(\pm)}(x_2)$ рассчитываются по формуле

$${}^{(j)}\epsilon_{22}^{(\pm)}(x_2) = x_3 \frac{\partial^2 w_j(x_2)}{\partial x_2^2}. \quad (40)$$

Определим интегральные характеристики напряженного состояния на различных участках сегнетоэлектрического стержня.

Подставляя определение (40) деформации $^{(j)}\epsilon_{22}^{(\pm)}(x_2)$ в формулу (24), получаем следующий результат

$$^{(n)}\sigma_{22}^{(\pm)} = Y_E x_3 \frac{\partial^2 w_n}{\partial x_2^2} \mp e_{12}^* \frac{U_{(n)}^{(\pm)}}{2\alpha}. \quad (41)$$

Подставляя формулу (41) в определение изгибающего момента (37), получаем

$$\begin{aligned} M_u^{(n)}(x_2) &= 2\alpha \int_{-b}^b \left[Y_E x_3 \frac{\partial^2 w_n(x_2)}{\partial x_2^2} \mp e_{12}^* \frac{U_{(n)}^{(\pm)}}{2\alpha} \right] x_3 dx_3 = \frac{4\alpha b^3}{3} Y_E \frac{\partial^2 w_n(x_2)}{\partial x_2^2} + \\ &+ e_{12}^* \left[\int_{-b}^{-h} x_3 U_{(n)}^{(-)} dx_3 - \int_h^b x_3 U_{(n)}^{(+)} dx_3 \right] = Y_E J_1 \frac{\partial^2 w_n(x_2)}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2} e_{12}^* (b^2 - h^2) [U_{(n)}^{(-)} + U_{(n)}^{(+)}]. \end{aligned} \quad (42)$$

Если, как ранее было принято, положить $U_{(n)}^{(-)} = U_{(n)}^{(+)} = U_{(n)}$, то изгибающие моменты на первом и третьем участках сегнетоэлектрического стержня рассчитываются по формулам

$$M_u^{(n)}(x_2) = Y_E J_1 \frac{\partial^2 w_n(x_2)}{\partial x_2^2} - M_0^{(n)}, \quad (43)$$

где $M_0^{(n)} = e_{12}^* (b^2 - h^2) U_{(n)}$ – обусловленный внешними устройствами изгибающий момент. При этом $U_{(1)} = U_0$ и $U_{(3)} = U_2$.

Изгибающие моменты $M_u^{(m)}(x_2)$ ($m = 2, 4$) на участках с четными номерами определяются следующим образом

$$M_u^{(m)}(x_2) = Y J_1 \frac{\partial^2 w_m(x_2)}{\partial x_2^2}. \quad (44)$$

Принимая во внимание выражения (43) и (44), получаем следующие соотношения для расчета поперечных сил

$$Q^{(k)}(x_2) = Y_{(k)} J_1 \frac{\partial^3 w_k(x_2)}{\partial x_2^3}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (45)$$

Отчетливо видно, что условия сопряжения (33) – (36) на трех границах разделов участков сегнетоэлектрического стержня доставляют двенадцать алгебраических уравнений, в которых содержится шестнадцать подлежащих определению констант $A_1, \dots, A_{16}$. Недостающие до однозначного (единственного) определения этих констант четыре алгебраических уравнения формируют граничные условия, которые определяются способом закрепления торцов $x_2 = 0$ и $x_2 = L$ сегнетоэлектрического стержня. На практике с достаточной мерой адекватности декларируемому состоянию реализуются три типа закрепления, а именно: свободное и шарнирное опирание торцов стержня, а также жесткая заделка. Формально эти три способа закрепления описываются следующими соотношениями:

– свободное закрепление торцов $x_2 = 0, L$

$$M_u|_{x_2=0,L} = 0, \quad Q|_{x_2=0,L} = 0; \quad (46)$$

– шарнирное опирание торцов $x_2 = 0, L$

$$w|_{x_2=0,L} = 0, \quad M_u|_{x_2=0,L} = 0; \quad (47)$$

– жесткая заделка торцов $x_2 = 0, L$

$$w|_{x_2=0,L} = 0, \quad \vartheta|_{x_2=0,L} = 0. \quad (48)$$

Предположим, что левый торец $x_2 = 0$ стержня свободен, а правый торец $x_2 = L$ – жестко заделан в абсолютно неподвижную опору. В этом случае, последовательно записывая граничные условия (46) в сечении $x_2 = 0$, условия сопряжения (33) – (36) в сечениях $x_2 = \ell_1; \ell_2; \ell_3$ и граничные условия (48) в сечении $x_2 = L$, получаем необходимую для единственного определения шестнадцати констант A_j неоднородную систему из шестнадцати линейных алгебраических уравнений. Эта система уравнений записывается следующим образом

$$m_{ij}A_j = P_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, 16. \quad (49)$$

Решение системы уравнений (49) для константы A_j можно записать в следующем виде

$$A_j = \frac{M_0^{(1)}}{Y_E J_1 \lambda_1^2} \beta_{1j}(\omega, \Pi) + \frac{M_0^{(2)}}{Y J_1 \lambda_2^2} \beta_{2j}(\omega, \Pi), \quad (50)$$

где $\beta_{1j}(\omega, \Pi) = (-1)^{j+1} \frac{\Delta_{j1}}{\Delta_0} - (-1)^{j+5} \frac{\Delta_{j5}}{\Delta_0}$; $\beta_{2j}(\omega, \Pi) = -(-1)^{j+9} \frac{\Delta_{j9}}{\Delta_0} + (-1)^{j+13} \frac{\Delta_{j13}}{\Delta_0}$; Δ_{jk} ($k = 1; 5; 9; 13$)

– определитель матрицы размером 15×15 , который получается из матрицы 16×16 , составленной из коэффициентов при константах A_j в системе уравнений (49) путем вычеркивания j -го столбца и k -ой строки; Δ_0 – главный определитель системы уравнений (49).

Так как $M_0^{(1)} = e_{12}^*(b^2 - h^2)U_0$, а $M_0^{(2)} = e_{12}^*(b^2 - h^2)U_2$, то, для удобства последующих рассуждений соотношение (50) целесообразно записать в следующем виде

$$A_j = U_0 \beta_{1j}^*(\omega, \Pi) + U_2 \beta_{2j}^*(\omega, \Pi), \quad (51)$$

где $\beta_{1j}^*(\omega, \Pi) = [e_{12}^*(b^2 - h^2) / (Y_E J_1 \lambda_1^2)] \beta_{1j}(\omega, \Pi)$; $\beta_{2j}^*(\omega, \Pi) = [e_{12}^*(b^2 - h^2) / (Y J_1 \lambda_2^2)] \beta_{2j}(\omega, \Pi)$.

Записав соотношение (51) вновь приходим к выводу, что напряженно-деформированное состояние сегнетоэлектрического стержня определяется двумя потенциалами U_0 и U_2 , которые связаны между собой линейной зависимостью.

Для определения этой зависимости выполним расчет потенциала U_2 на электроде вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора.

Очевидно, что $U_2^{(\pm)} = Z_2 I_2^{(\pm)}$, где $I_2^{(\pm)}$ – амплитудное значение электрического тока в проводнике вторичной электрической цепи. Так как $I_2^{(\pm)} = -i\omega Q_2^{(\pm)}$, где $Q_2^{(\pm)}$ – амплитудное значение электрического заряда на верхнем (знак плюс) и нижнем (знак минус) (рис. 3) электродах электродной группы вторичной электрической цепи. Электрические заряды $Q_2^{(\pm)}$ определяются следующим образом:

$$Q_2^{(+)} = \int_{\ell_2}^{\ell_3} \int_h^b {}^{(3)}D_1^{(+)}(x_2, x_3) dx_2 dx_3, \quad Q_2^{(-)} = \int_{\ell_2}^{\ell_3} \int_{-b}^{-h} {}^{(3)}D_1^{(-)}(x_2, x_3) dx_2 dx_3, \quad (52)$$

$$\text{где } {}^{(3)}D_1^{(\pm)}(x_2, x_3) = \pm e_{12}^* \frac{\partial^2 w_3(x_2)}{\partial x_2^2} + \chi_{11}^\sigma \frac{U_2^{(\pm)}}{2\alpha}.$$

Подставляя определение электрической индукции ${}^{(3)}D_1^{(\pm)}(x_2, x_3)$ в формулы для расчета электрических зарядов, получаем следующие результаты

$$\begin{aligned} Q_2^{(+)} &= \frac{1}{2} e_{12}^* (b^2 - h^2) \left[\frac{\partial w_3(\ell_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial w_3(\ell_2)}{\partial x_2} \right] + \frac{(b-h)(\ell_3 - \ell_2)}{2\alpha} \chi_{11}^\sigma U_2^{(+)}, \\ Q_2^{(-)} &= \frac{1}{2} e_{12}^* (b^2 - h^2) \left[\frac{\partial w_3(\ell_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial w_3(\ell_2)}{\partial x_2} \right] + \frac{(b-h)(\ell_3 - \ell_2)}{2\alpha} \chi_{11}^\sigma U_2^{(-)}. \end{aligned} \quad (53)$$

Из показанной на рис. 3 схемы включения электрических нагрузок следует, что $U_2^{(+)} = U_2^{(-)} = U_2$. При этом, как видно из соотношений (53), $Q_2^{(+)} = Q_2^{(-)} = Q_2$.

Введем для удобства дальнейших записей следующие обозначения:

$$\begin{aligned} w_3^{(1)}(x_2) &= \lambda_1 \left[\beta_{19}^*(\omega, \Pi) \cos \lambda_1 x_2 - \beta_{1,10}^*(\omega, \Pi) \sin \lambda_1 x_2 + \beta_{1,11}^*(\omega, \Pi) \operatorname{ch} \lambda_1 x_2 + \beta_{1,12}^*(\omega, \Pi) \operatorname{sh} \lambda_1 x_2 \right]; \\ w_3^{(1)}(x_2) &= \lambda_1 \left[\beta_{19}^*(\omega, \Pi) \cos \lambda_1 x_2 - \beta_{1,10}^*(\omega, \Pi) \sin \lambda_1 x_2 + \beta_{1,11}^*(\omega, \Pi) \operatorname{ch} \lambda_1 x_2 + \beta_{1,12}^*(\omega, \Pi) \operatorname{sh} \lambda_1 x_2 \right]. \end{aligned}$$

С учетом этих обозначений выражение (53) можно записать в следующем виде

$$Q_2^{(\pm)} \equiv Q_2 = C_3^\sigma \left[U_2 \Xi_3^{(2)}(\omega, \Pi) + U_0 \Xi_3^{(1)}(\omega, \Pi) \right], \quad (54)$$

где $C_3^\sigma = (b-h)(\ell_3 - \ell_2) \chi_{11}^\sigma / (2\alpha)$ – динамическая электрическая емкость поляризованного сегнетоэлектрика под электродом электродной группы вторичной электрической цепи; числовые значения функций $\Xi_3^{(1)}(\omega, \Pi)$ и $\Xi_3^{(2)}(\omega, \Pi)$ (символ Π обозначает набор геометрических и физико-механических параметров объекта) задаются следующими расчетными формулами:

$$\Xi_3^{(1)}(\omega, \Pi) = \frac{\alpha(b+h)e_{12}^*}{(\ell_3 - \ell_2)\chi_{11}^\sigma} \left[w_3^{(1)}(\ell_3) - w_3^{(1)}(\ell_2) \right]; \quad \Xi_3^{(2)}(\omega, \Pi) = 1 + \frac{\alpha(b+h)e_{12}^*}{(\ell_3 - \ell_2)\chi_{11}^\sigma} \left[w_3^{(2)}(\ell_3) - w_3^{(2)}(\ell_2) \right].$$

$$\text{Таким образом, } U_2 = -i\omega Z_2 C_3^\sigma \left[U_2 \Xi_3^{(2)}(\omega, \Pi) + U_0 \Xi_3^{(1)}(\omega, \Pi) \right].$$

Из последней записи следует, что

$$U_2 = -\frac{i\omega Z_2 C_3^\sigma \Xi_3^{(1)}(\omega, \Pi)}{1 + i\omega Z_2 C_3^\sigma \Xi_3^{(2)}(\omega, \Pi)} U_0 = -\Xi_0(\omega, \Pi) U_0, \quad (55)$$

где функция $\Xi_0(\omega, \Pi)$ имеет смысл частотно зависимого коэффициента обратной связи.

Теперь остается определить амплитудное значение потенциала U_0 и эта операция завершает построение математической модели стержневого пьезоэлектрического трансформатора на изгибных колебаниях.

Как следует из формулы (23), электрический потенциал U_0 определяется электрическим импедансом $Z_{(1)}^{(\pm)}$. Очевидно, что при равенстве геометрических параметров электродной группы первичной электрической цепи и при одинаковых значениях потенциалов на электродах, электрические импедансы $Z_{(1)}^{(+)} = Z_{(1)}^{(-)} = Z_{(1)}$. Как и ранее, запишем $Z_{(1)} = U_0/I_1$, где $I_1 = -i\omega Q_1$ – амплитудное значение электрического тока в проводниках первичной электрической цепи трансформатора; Q_1 – амплитудное значение электрического заряда на электроде электродной группы первичной электрической цепи. Проводя те же самые рассуждения, что и при определении заряда Q_2 , можем записать, что

$$Q_1^{(\pm)} \equiv Q_1 = C_1^\sigma \left[U_2 \Xi_1^{(2)}(\omega, \Pi) + U_0 \Xi_1^{(1)}(\omega, \Pi) \right], \quad (56)$$

где $C_1^\sigma = \ell_1(b-h)\chi_{11}^\sigma/(2\alpha)$ – динамическая электрическая емкость поляризованного сегнетоэлектрика;

$$\Xi_1^{(1)}(\omega, \Pi) = 1 + \frac{\alpha(b+h)e_{12}^*}{\ell_1\chi_{11}^\sigma} \left[w_1^{(1)}(\ell_1) - w_1^{(1)}(0) \right]; \quad \Xi_1^{(2)}(\omega, \Pi) = \frac{\alpha(b+h)e_{12}^*}{\ell_1\chi_{11}^\sigma} \left[w_1^{(2)}(\ell_1) - w_1^{(2)}(0) \right];$$

функции $w_1^{(1)}(x_2)$ и $w_1^{(2)}(x_2)$ определяются по образцу и подобию функций $w_3^{(1)}(x_2)$ и $w_3^{(2)}(x_2)$.

Подставляя в формулу (56) правую часть выражения (55), а полученный результат – в определение электрического импеданса $Z_{(1)}$, приходим к следующему результату

$$Z_{(1)} = \frac{1}{-i\omega C_1^\sigma \Psi_1(\omega, \Pi)},$$

$$\text{где } \Psi_1(\omega, \Pi) = \Xi_1^{(1)}(\omega, \Pi) - \Xi_0(\omega, \Pi)\Xi_1^{(2)}(\omega, \Pi).$$

После определения электрического импеданса поляризованного сегнетоэлектрика под электродами первичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора определяется амплитудное значение потенциала на электроде в первичной электрической цепи

$$U_0 = \frac{U_1}{1 - i\omega Z_1 C_1^\sigma \Psi_1(\omega, \Pi)}.$$

Подставляя последний результат в формулу (55), получаем выражение для расчета коэффициента трансформации

$$K(\omega, \Pi) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\Xi_0(\omega, \Pi)}{1 - i\omega Z_1 C_1^\sigma \Psi_1(\omega, \Pi)}. \quad (57)$$

Выражение (57) является математической моделью показанного на рис. 1 стержневого пьезоэлектрического трансформатора.

3. Заключение

В работе построена математическая модель пьезоэлектрического трансформатора стержневого типа, показаны основные особенности математического моделирования пьезоэлектрических трансформаторов, рассмотрена простейшая конструкция трансформатора в виде призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением, из-

готовленного из пьезокерамики, определены выражения для расчета коэффициента трансформации и амплитудного значения потенциалов на электродах пьезоэлектрического трансформатора стержневого типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джагунов Р. Г., Ерофеев А. А. Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления. Санкт-Петербург: Политехника, 1994. 608 с.
2. Лавриненко В. В. Пьезоэлектрические трансформаторы. Москва: Энергия, 1975. 112 с.
3. Зубцов В. И. Математическая модель преобразователя статических механических напряжений внутри деформируемых материалов. Инженерная физика. 2004. № 4. С. 31–36.
4. Хуторненко С. В., Васильчук Д. П. Математическая модель пьезоэлектрического резонатора при наличии градиентного поля в плоскости кристаллического элемента. Наукові праці ДонНТУ. Серія: Гірничо-електромеханічна. 2011. Вип. 21 (189). С. 168–172.
5. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Ефективність електромеханічного перетворення енергії при резонансних коливаннях елементів конструкцій із п'єзокераміки. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2006. № 3. С. 225–237.
6. Карлаш В. Л. Вынужденные электромеханические колебания прямоугольных пьезокерамических стержней с разделенными электродами. Прикладная механика. 2013. Т. 49. № 3. С. 125–134.
7. Петрищев О. Н. Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса. Киев: Аверс, 2012. 300 с.
8. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. Киев: Наукова думка, 1989. 280 с.
9. Соппротивление материалов: Учебник для вузов / Под общ. ред. Г.С. Писаренко – Киев: Вища школа, 1979. 696 с.

REFERENCES

1. Dzhagupov, R. G. Erofeev, A. A. (1994) Piezoelectronic devices of computing, control and monitoring systems. St. Petersburg: Politekhnik, 608 p. [in Russian].
2. Lavrinenko, V. V. (1975) Piezoelectric transformers. Moscow: Energiya, 112 p. [in Russian].
3. Zubczov, V. I. (2004) Mathematical model of static mechanical stresses converter within deformable material. Inzhenernaya fizika, No. 4, pp. 31–36 [in Russian].
4. Khutornenko, S. V., Vojeykov, A. N., Vasylchuk, D. P. (2011) Mathematic model of piezoelectrical resonator at the presence of gradient field in crystallic element platitude. Naukovi pratsi DonNTU. Seriya: Hirnycho-elektromekhanichna, No. 21 (189), pp. 168–172 [in Russian].
5. Shul'ga, M. O., Karlash, V. L. (2006) An efficiency of electromechanical energy transformation at resonant vibrations of piezoceramics constructional elements. Fyzyko-matematychne modelyuvannya ta informacii tekhnologii, No. 3, pp. 225–237 [in Ukrainian].
6. Karlash, V. L. (2013) Forced oscillations of electromechanical rectangular piezoceramic rods with divided electrodes. Prikladnaya mekhanika, Vol. 49, No 3, pp. 125–134 [in Russian].
7. Petrishchev, O. N. (2012) Harmonic oscillations of piezoceramic elements. Part 1. Harmonic vibrations of piezoceramic elements in vacuum and a method of resonance – antiresonance. Kiev: Avers, 300 p. [in Russian].
8. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F., Shulga, N. A. (1989) Mechanics of related fields in structural elements. Vol. 5. Electroelasticity. Kiev: Naukova dumka, 280 p. [in Russian].
9. Resistance of materials: Textbook for universities. (1979) Ed. Pisarenko, G. S. Kiev: Vyshcha shkola, 696 p. [in Russian].

УДК 517.977.56

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ГУРСА-ДАРБУ

К.Б. МАНСИМОВ, В.А. СУЛЕЙМАНОВА

Бакинский Государственный Университет
Институт Систем Управления НАН Азербайджана
Сумгаитский Государственный Университет
Баку, АЗЕРБАЙДЖАН
kamilbmansimov@gmail.com, kmansimov@mail.ru

РЕЗЮМЕ

Изучается граничная задача оптимального управления системами Гурса-Дарбу с многоточечным критерием качества при предположении выпуклости области управления. Установлен аналог линеаризованного условия максимума. Выведены необходимые условия оптимальности квазиособых управлений.

Ключевые слова: граничное управление, система Гурса-Дарбу, многоточечный функционал, необходимое условие оптимальности, линеаризованный принцип максимума, аналог условия Габасова-Кирилловой, квазиособый случай.

QURSA-DARBU SİSTEMLƏRİ İLƏ BİR SƏRHƏD OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA XÜLASƏ

Məqalədə Qursa-Darbu sistemi ilə təsvir olunan bir sərhəd optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. İdarə oblastının qabarıqlığı sinfi daxilində optimallıq üçün xəttişdirilmiş maksimum şərti daxilində birinci tərtib zəruri şərt isbat olunmuş, sonra bu zəruri şərtin cırlaşdığı hal tədqiq edilmişdir.

Açar sözlər: sərhəd nəzarəti, Goursat-Darboux sistemi, çoxbucaqlı funksional, zəruri optimallıq vəziyyəti, lineerləşdirilmiş maksimum prinsip, Qabasov-Kirilovun analoqu, quasi-təkəlli vəziyyət.

Açar sözlər: sərhəd nəzarəti, Goursat-Darboux sistemi, çoxbucaqlı funksional, zəruri optimallıq vəziyyəti, lineerləşdirilmiş maksimum prinsip, Qabasov-Kirilovun analoqu, quasi-təkəlli vəziyyət.

ON ONE BOUNDARY OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF GOURSAT-DARBOUX SYSTEMS

ABSTRACT

In the paper study the one boundary optimal control problem described of the Goursat-Darboux systems with a multipoint quality criterion under the assumption convexity of the domain of control. The necessary optimality conditions of quasi-singular controls are introduced.

Keywords: boundary control, Goursat-Darboux system, multipoint functional, necessary optimality condition, linearized maximum principle, analog of condition Gabasov-Kirillovs, quasi-singular case.

1. Введение

Задачи оптимального управления описываемые системами Гурса-Дарбу и с управляемым граничным условиям начали изучаться с работ А.И. Егорова [1, 2]. В дальнейшем в работах [3-14] и др. получены ряд необходимых условий оптимальности и доказаны теоремы существования оптимальных распределенных и граничных управлений. Обзор соответствующих результатов имеется, например в [14- 16].

В настоящей работе исследуется одна граничная задача оптимального управления описываемая системой Гурса-Дарбу и многоточечным функционалам качества при

предположении выпуклости области управления. Установлено необходимое условие оптимальности в форме линеаризованного условия максимума и исследован случай его вырождения.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$I(u) = \varphi(a(T_1), a(T_2), \dots, a(T_k)) + G(z(T_1, X_1), \dots, z(T_k, X_k)) \quad (2.1)$$

при ограничениях

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2.2)$$

$$z_{t,x} = B(t, x)z_t + f(t, x, z, z_x), \quad (t, x) \in D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1], \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} z(t, x_0) &= a(t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ z(t_0, x) &= b(x), \quad x \in X = [x_0, x_1], \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$a(t_0) = b(x_0) = a_0,$$

$$\dot{a} = g(t, a, u), \quad t \in T, \quad (2.5)$$

$$a(t_0) = a_0. \quad (2.6)$$

Здесь $f(t, x, z, z_x)$ – заданная n -мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z, z_x до второго порядка включительно, $B(t, x)$ – заданная измеримая и ограниченная $(n \times n)$ матричная функция, $b(x)$ – заданная n -мерная абсолютно непрерывная вектор-функция, t_0, t_1, x_0, x_1 – $(t_0 < t_1; x_0 < x_1)$ – заданы, (T_i, X_i) , $i = \overline{1, k}$ ($t_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_k \leq t_1$; $x_0 < X_1 < X_2 < \dots < X_k \leq x_1$) – заданные точки, a_0 – заданный постоянный вектор, $g(t, a, u)$ – заданная n -мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (a, u) до второго порядка включительно, $\varphi(a)$ и $G(z)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции, U – заданное непустое, ограниченное и выпуклое множество, $u(t)$ – измеримая и ограниченная r -мерная управляющая вектор-функция.

Каждую управляющую функцию $u(t)$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что при заданном допустимом управлении $u(t)$ задача Коши (2.5)-(2.6) и задача Гурса (2.3)-(2.4) имеют единственное абсолютно непрерывное решение (в смысле [17, 10]) $a(t)$ и $z(t, x)$ соответственно.

Допустимое управление $u(t)$ доставляющее минимум функционалу (2.1) при ограничениях (2.2)-(2.6) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t), a(t), z(t, x))$ – оптимальным процессом.

3. Специальное приращение функционала качества

Считая $(u(t), a(t), z(t, x))$ фиксированным допустимым процессом введем обозначения

$$M(t, a, u, q) = q' g(t, a, u),$$

$$\begin{aligned}
 H(t, x, z, z_x, \psi) &= \psi' f(t, x, z, z_x), \\
 M_a(t, a(t), u(t), q(t)) &= M_a(t), \\
 M_{aa}(t, a(t), u(t), q(t)) &= M_{aa}(t), \\
 M_{ua}(t, a(t), u(t), q(t)) &= M_{ua}(t), \\
 M_{uu}(t, a(t), u(t), q(t)) &= M_{uu}(t), \\
 H_z(t, x, z(t, x), z_x(t, x), \psi(t, x)) &= H_z(t, x), \\
 H_{zz}(t, x, z(t, x), z_x(t, x), \psi(t, x)) &= H_{zz}(t, x), \\
 H_{zz_x}(t, x, z(t, x), z_x(t, x), \psi(t, x)) &= H_{zz_x}(t, x), \\
 g_a(t, a(t), u(t)) &= g_a(t), \\
 f_z(t, x, z(t, x), z_x(t, x)) &= f_z(t, x), \\
 f_{z_x}(t, x, z(t, x), z_x(t, x)) &= f_{z_x}(t, x),
 \end{aligned}$$

где $\psi = \psi(t, x)$ и $q = q(t)$ пока неизвестные n -мерные вектор-функции, а $(')$ штрих означает операцию транспонирования.

Через $(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \bar{a}(x) = a(x) + \Delta a(x), \bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x))$ обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение критерия качества

$$\begin{aligned}
 \Delta I(u) = I(\bar{u}) - I(u) &= [\varphi(\bar{a}(T_1), \dots, \bar{a}(T_k)) - \varphi(a(T_1), \dots, a(T_k))] + \\
 &+ [G(\bar{z}(T_1, X_1), \dots, \bar{z}(T_k, X_k)) - G(z(T_1, X_1), \dots, z(T_k, X_k))].
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Далее ясно, что приращение $(\Delta a(t), \Delta z(t, x))$ – состояния $(a(t), z(t, x))$ есть решение задачи

$$\Delta \dot{a} = g(t, \bar{a}, \bar{u}) - g(t, a, u), \quad (3.2)$$

$$\Delta a(t_0) = 0, \quad (3.3)$$

$$\Delta z_{t,x} = B(t, x) \Delta z_t + f(t, x, \bar{z}, \bar{z}_x) - f(t, x, z, z_x), \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta z(t, x_0) &= \Delta a(t), \quad t \in T, \\
 \Delta z(t_0, x) &= 0, \quad x \in X.
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Умножая обе части соотношения (3.2) ((3.4)) слева скалярно на $q(t)$ ($\psi(t, x)$), а затем интегрируя обе части полученного соотношения по T (по D) получим

$$\int_{t_0}^{t_1} q'(t) \Delta \dot{a}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} [M(t, \bar{a}(t), \bar{u}(t), q(t)) - M(t, a(t), u(t), q(t))] dt, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \Delta z_{t,x}(t, x) dx dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) B(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt + \\
 &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{z}_x(t, x), \psi(t, x)) - H(t, x, z(t, x), z_x(t, x), \psi(t, x))] dx dt.
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

С учетом тождеств (3.6) и (3.7) формула приращения (3.1) записывается в виде

$$\begin{aligned}
 \Delta I(u) &= \varphi(\bar{a}(t_1)) - \varphi(a(t_1)) + G(\bar{z}(t_1, x_1)) - G(z(t_1, x_1)) + \int_{t_0}^{t_1} q'(t) \Delta \dot{a}(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} [M(t, \bar{a}(t), \bar{u}(t), q(t)) - \\
 &- M(t, a(t), u(t), q(t))] dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \Delta z_{t,x}(t, x) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) B(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt - \\
 &- \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{z}_x(t, x), \psi(t, x)) - H(t, x, z(t, x), z_x(t, x), \psi(t, x))] dx dt.
 \end{aligned}$$

Отсюда используя формулу Тейлора, будем иметь

$$\begin{aligned}
 I(u) = & \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'(a(T_1), \dots, a(T_k))}{\partial a_k} \Delta a(T_k) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial G(z(T_1, X_1), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_k} \Delta z(T_k, X_k) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \Delta a'(T_i) \frac{\partial^2 \varphi(a(T_1), \dots, a(T_k))}{\partial a_i \partial a_j} \Delta x(T_j) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \Delta z'(T_i, X_i) \frac{\partial^2 G(z(T_1, X_1), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_i \partial z_j} \Delta z(T_j, X_j) + \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} q'(t) \Delta \dot{a}(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} [M'_a(t) \Delta u(t) + M'_u(t) \Delta u(t)] dt - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\Delta a'(t) M_{aa}(t) \Delta a(t) + 2 \Delta u'(t) M_{ua}(t) \Delta a(t) + \Delta u'(t) M_{uu}(t) \Delta u(t)] dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \Delta z_{bx}(t, x) dx dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) B(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H'_z(t, x) \Delta z(t, x) + H'_{z_x}(t, x) \Delta z_x(t, x)] dx dt - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [\Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \Delta z(t, x) + \Delta z'_x(t, x) H_{z_x z}(t, x) \Delta z(t, x) + \Delta z'(t, x) H_{zz_x}(t, x) \Delta z_x(t, x) + \\
 & + \Delta z'_x(t, x) H_{z_x z_x}(t, x) \Delta z_x(t, x)] dx dt + o_1 \left(\left[\sum_{i=1}^k \|\Delta a(T_i)\| \right]^2 \right) + o_2 \left(\left[\sum_{i=1}^k \|\Delta z(T_i, X_i)\| \right]^2 \right) - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} o_3 (\|\Delta u(t)\| + \|\Delta a(t)\|)^2 dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_4 (\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta z_x(t, x)\|)^2 dx dt,
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $o(\alpha^2)/\alpha^2 \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Ясно, что

$$\Delta a(t) = \int_{t_0}^t \Delta \dot{a}(\tau) d\tau, \tag{3.9}$$

$$\Delta z(t, x) = \Delta a(t) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \Delta z_{ts}(\tau, s) ds d\tau, \tag{3.10}$$

$$\Delta z_t(t, x) = \Delta \dot{a}(t) + \int_{x_0}^x \Delta z_{ts}(t, s) ds, \tag{3.11}$$

$$\Delta z_x(t, x) = \int_{t_0}^t \Delta z_{tx}(\tau, x) d\tau, \tag{3.12}$$

$$\Delta a(T_i) = \int_{t_0}^{t_1} \alpha_i(t) \Delta \dot{a}(t) dt,$$

$$\Delta z(T_i, X_i) = \Delta a(T_i) + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \beta_i(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt,$$

где $\alpha_i(t)$ ($\beta_i(t, x)$) характеристическая функция отрезка $[t_0, T_i]$ (области $[t_0, T_i] \times [x_0, X_i]$).

Используя формулы (3.9)-(3.12) и применяя формулу Дирихле (см. напр. [17]) можно доказать, что

$$\int_{t_0}^t M'_a(t) \Delta a(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_t^{t_1} M'_a(\tau) d\tau \right] \Delta \dot{a}(t) dt, \tag{3.13}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) B(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) B(t, x) \Delta \dot{a}(t) dx dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_s^{x_1} \psi'(t, s) B(t, s) ds \right] \Delta z_{tx}(t, x) dx dt, \quad (3.14)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_z(t, x) \Delta z(t, x) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_t^{t_1} H'_z(\tau, x) d\tau \right] \Delta \dot{a}(t) dx dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_t^{x_1} H'_z(\tau, s) ds d\tau \right] \Delta z_{tx}(t, x) dx dt, \quad (3.15)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_{z_x}(t, x) \Delta z_x(t, x) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_t^{t_1} H'_{z_x}(\tau, x) d\tau \right] \Delta z_{tx}(t, x) dx dt, \quad (3.16)$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'(a(T_1), \dots, a(T_k))}{\partial a_k} \Delta a(T_k) = \int_{t_0}^{t_1} \alpha_i(t) \frac{\partial \varphi'(a(T_1), \dots, a(T_k))}{\partial a_k} \Delta \dot{a}(t) dt, \quad (3.17)$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial G'(z(T_1, X_1), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_i} \Delta z(T_i, X_i) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial G'(z(T_1, X_1), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_i} \Delta a(T_i) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^k \frac{\partial G'(z(T_1, X_1), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_i} \beta_i(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \alpha_i(t) \frac{\partial G'(z(T_1, X_1), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_i} \Delta \dot{a}(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \beta_i(t, x) \frac{\partial G'(z(T_1, X_1), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_i} \Delta z_{tx}(t, x) dx dt. \quad (3.18)$$

С учетом доказанных тождеств (3.13)-(3.18) формула (3.8) для приращения функционала качества (2.1) представляется в виде

$$\Delta I(u) = - \int_t^{t_1} M'_u(t) \Delta u(t) dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \frac{\partial \varphi(a(T_1), \dots, a(T_k))}{\partial a_k} + q(t) + \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \frac{\partial G'(z(T_1, X_1), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_i} - \int_t^{t_1} M_a(\tau) d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_{x_0}^{x_1} \int_t^{t_1} H_z(\tau, x) dx d\tau - \int_{x_0}^{x_1} B'(t, x) \psi(t, x) dx \right] \Delta \dot{a}(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\sum_{i=1}^k \beta_i(t, x) \frac{\partial G'(z(T_1, X_1), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_i} - \right.$$

$$\left. - \psi(t, x) - \int_s^{x_1} B'(t, s) \psi(t, s) ds - \int_t^{t_1} H'_z(\tau, s) d\tau ds - \int_t^{x_1} H_{z_x}(\tau, x) d\tau \right] \Delta z_{tx}(t, x) dx dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \Delta a'(T_i) \frac{\partial^2 \varphi(a(T_1), \dots, a(T_k))}{\partial a_i \partial a_j} \Delta a(T_j) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \Delta z'(T_i, X_i) \frac{\partial G(z(T_1, X_1), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_i \partial z_j} \Delta z(T_j, X_j) -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\Delta a'(t) M_{aa}(t) \Delta a(t) + 2 \Delta u'(t) M_{ua}(t) \Delta a(t) + \Delta u'(t) M_{uu}(t) \Delta u(t)] dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [\Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \Delta z(t, x) + \Delta z'(t, x) H_{zx}(t, x) \Delta z_x(t, x) + \Delta z'_x(t, x) H_{zx}(t, x) \Delta z(t, x) +$$

$$+ \Delta z'_x(t, x) H_{z_x z_x}(t, x) \Delta z_x(t, x)] dx dt + o_1 \left(\left[\sum_{i=1}^k \|\Delta a(T_i)\| \right]^2 \right) + o_2 \left(\left[\sum_{i=1}^k \|\Delta z(T_i, X_i)\| \right]^2 \right) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} o_3 (\|\Delta a(t)\| + \|\Delta u(t)\|)^2 dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_4 (\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta z_x(t, x)\|)^2 dx dt.$$

Если предполагать, что $(\psi(t, x), q(t))$ является решением системы интегральных уравнений

$$\psi(t, x) = - \sum_{i=1}^k \beta_i(t, x) \frac{\partial G(z(T_1, X_1), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_i} + \int_s^{x_1} B'(t, s) \psi(t, s) ds +$$

$$+ \int_t^{t_1} \int_x^{x_1} H_z(\tau, s) ds d\tau + \int_t^{t_1} H_{z_x}(\tau, x) d\tau, \quad (3.20)$$

$$q(t) = - \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \frac{\partial \varphi(a(T_1), \dots, a(T_k))}{\partial a_k} - \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \frac{\partial G(z(T_1, X_1), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_i} + \int_t^{t_1} M_a(\tau) d\tau - \int_{x_0}^{x_1} \int_t^{t_1} H_z(\tau, x) dx d\tau + \int_{x_0}^{x_1} B'(t, x) \psi(t, x) dx, \quad (3.21)$$

то формула приращения (3.19) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta I(u) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \Delta a'(T_i) \frac{\partial^2 \varphi(a(T_1), \dots, a(T_k))}{\partial a_i \partial a_j} \Delta a(T_j) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \Delta z'(T_i, X_i) \frac{\partial^2 G(z(T_1, X_1), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_i \partial z_j} \Delta z(T_j, X_j) - \int_{t_0}^{t_1} M_u'(t) \Delta u(t) dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\Delta a'(t) M_{aa}(t) \Delta a(t) + 2 \Delta u'(t) M_{au}(t) \Delta a(t) + \Delta u'(t) M_{uu}(t) \Delta u(t)] dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [\Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \Delta z(t, x) + \Delta z'(t, x) H_{zx}(t, x) \Delta z_x(t, x) + \Delta z'_x(t, x) H_{zx}(t, x) \Delta z(t, x) + \\ &+ \Delta z'_x(t, x) H_{z_x z_x}(t, x) \Delta z_x(t, x)] dx dt + o_1 \left(\left[\sum_{i=1}^k \|\Delta a(T_i)\| \right]^2 \right) + o_2 \left(\left[\sum_{i=1}^k \|\Delta z(T_i, X_i)\| \right]^2 \right) - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} o_3 \left(\|\Delta a(t)\| + \|\Delta u(t)\| \right)^2 dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_4 \left(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta z_x(t, x)\| \right)^2 dt dx. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Пусть $\varepsilon \in [0, 1]$ произвольное число, а $v(t) \in U$, $t \in T$ произвольная измеримая и ограниченная r -мерная вектор-функция (допустимое управление).

В силу выпуклости области управления U специальное приращение управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \varepsilon [v(t) - u(t)], \quad t \in T. \quad (3.23)$$

Через $(\Delta a(t; \varepsilon), \Delta z(t, x; \varepsilon))$ обозначим специальное приращение вектора состояния $(a(t), z(t, x))$ отвечающее приращению (3.23) управления $u(t)$.

Используя оценки приведенные например в работах [1-4, 6, 7, 10, 11, 15] доказывается, что

$$\|\Delta a(t; \varepsilon)\| \leq L \varepsilon, \quad (3.24)$$

$$\|\Delta z(t, x; \varepsilon)\| \leq L \varepsilon, \quad \|\Delta z_x(t, x; \varepsilon)\| \leq L \varepsilon, \quad (t, x) \in D,$$

где $L = \text{const} > 0$ некоторое постоянное.

Используя эти оценки и (3.23) при помощи (3.2)-(3.3), (3.4)-(3.5) доказывается

Теорема 3.1. Для специального приращения $(\Delta a(t; \varepsilon), \Delta z(t, x; \varepsilon))$ состояния $(a(t), z(t, x))$ имеют место разложения

$$\begin{aligned} \Delta a(t; \varepsilon) &= \varepsilon \ell(t) + o(\varepsilon; t), \\ \Delta z(t, x; \varepsilon) &= \varepsilon m(t, x) + o(\varepsilon; t, x), \\ \Delta z_x(t, x; \varepsilon) &= \varepsilon m_x(t, x) + o(\varepsilon; t, x), \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $(\ell(t), m(t, x))$ является решением аналога уравнения в вариациях

$$\dot{\ell}(t) = g_a(t) \ell(t) + g_u(t) (v(t) - u(t)), \quad (3.26)$$

$$\ell(t_0) = 0, \quad (3.27)$$

$$m_x(t, x) = B(t, x)m_t(t, x) + f_z(t, x)m(t, x) - f_x(t, x)m_x(t, x), \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} m(t, x_0) &= \ell(t), \\ m(t_0, x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

С учетом разложений, (3.25) из формулы приращения (3.22), получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta I_\varepsilon(u) &= I(u + \Delta u_\varepsilon) - I(u) = -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} M'_u(t)(v(t) - u(t))dt + \frac{\varepsilon^2}{2} \{ \ell'(t_1) \varphi_{aa}(a(t_1)) \ell(t_1) + m'(t_1, x_1) G_{zz}(z(t_1, x_1)) m(t_1, x_1) - \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} [\ell'(t) M_{aa}(t) \ell(t) + 2(v(t) - u(t))' M_{ua}(t) \ell(t) + (v(t) - u(t))' M_{uu}(t) (v(t) - u(t))] dt + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [m'(t, x) H_{zz}(t, x) m(t, x) + m'(t, x) H_{zx}(t, x) m_x(t, x) + m'_x(t, x) H_{zx}(t, x) m(t, x) + \\ &\quad + m'_x(t, x) H_{zz}(t, x) m_x(t, x)] dx dt \} + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.30)$$

4. Необходимые условия оптимальности

Из разложения (3.30) следует

Теорема 4.1. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы для всех $v(t) \in U$, $t \in T$ выполнялось соотношение

$$\int_{t_0}^{t_1} M_u(t)(v(t) - u(t))dt \leq 0. \quad (3.31)$$

Необходимое условие оптимальности (3.31) есть аналог линеаризованного (дифференциального) (см. напр. [18, 19]) условия максимума для рассматриваемой задачи. Следуя работам [20, 21] можно доказать следующее утверждение.

Следствие 3.1. Необходимое условие оптимальности (3.31) имеет место тогда, только тогда когда для всех правильных точек (точек Лебега) (см. напр. [22-24]) для всех $w \in U$ выполняется неравенство

$$M'_u(\theta)(w - u(\theta)) \leq 0. \quad (3.32)$$

Соотношение (3.32) есть аналог линеаризованного условия максимума и принадлежит классу необходимых условий оптимальности первого порядка и нередко вырождается (см. напр. [25, 26]). Такие случаи называются квазиисобыми.

Определение 3.1. Допустимое управление $u(t)$ назовем квазиисобым управлением в задаче (2.1)-(2.6), если для всех $w \in U$, $\theta \in [t_0, t_1]$

$$M'_u(\theta)(w - u(\theta)) = 0. \quad (3.33)$$

Из разложения (3.30) в силу (3.33) следует

Теорема 3.2. Для оптимальности квазиисобого управления $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.6) необходимо, чтобы неравенство

$$\begin{aligned} &\ell(t_1) \varphi_{aa}(a(t_1)) \ell(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} [\ell'(t) M_{aa}(t) \ell(t) + 2(v(t) - u(t))' M_{ua}(t) \ell(t) + (v(t) - u(t))' M_{uu}(t) (v(t) - u(t))] dt + \\ &+ m'(t_1, x_1) G_{zz}(z(t_1, x_1)) m(t_1, x_1) - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [m'(t, x) H_{zz}(t, x) m(t, x) + m'(t, x) H_{zx}(t, x) m(t, x) + \\ &+ m'_x(t, x) H_{zx}(t, x) m(t, x) + m'_x(t, x) H_{zz}(t, x) m_x(t, x)] dx dt \geq 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

выполнялось для всех $v(t) \in U$, $t \in T$.

Неравенство (3.34) есть неявное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений. Используя его можно получить необходимые условия оптимальности квазиособых управлений непосредственно выраженные через параметры задачи (2.1)-(2.6).

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (3.26) с начальным условием (3.27) допускает представление [17, 27]

$$\ell(t) = \int_{t_0}^t F(t, \tau) g_u(\tau) (v(\tau) - u(\tau)) d\tau, \quad (3.35)$$

где $F(t, \tau)$ ($n \times n$) матричная функция являющаяся решением задачи

$$F_\tau(t, \tau) = -F(t, \tau) g_a(\tau),$$

$$F(t, t) = E,$$

(E ($n \times n$) – единичная матрица).

Используя результат работы [28] решение краевой задачи записывается в виде

$$m(t, x) = \int_{t_0}^t R(t, x; \tau, x_0) [\dot{\ell}(\tau) - f_{z_x}(\tau, x_0) \ell(\tau)] d\tau, \quad (3.36)$$

где $R(t, x; \tau, s)$ ($n \times n$) матричная функция решение интегрального уравнения.

$$R(t, x; \tau, s) = E + \int_{\tau}^t \int_s^x R(t, x; \alpha, \beta) f_z(\alpha, \beta) d\alpha d\beta + \int_{\tau}^t R(t, x; \alpha, s) f_{z_x}(\alpha, s) d\alpha + \int_s^x R(t, x; \tau, \beta) B(\tau, \beta) d\beta.$$

Из (3.36) с учетом (3.10) имеем

$$\begin{aligned} m(t, x) &= \int_{t_0}^t R(t, x; \tau, x_0) [g_a(\tau) \ell(\tau) + g_u(\tau) (v(\tau) - u(\tau)) - f_{z_x}(\tau, x_0) \ell(\tau)] d\tau = \\ &= \int_{t_0}^t R(t, x; \tau, x_0) g_u(\tau) (v(\tau) - u(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t R(t, x; \tau, x_0) [g_a(\tau) - f_{z_x}(\tau, x_0)] \ell(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Полагая

$$Q(t, x, \tau) = R(t, x; \tau, x_0) [g_a(\tau) - f_{z_x}(\tau, x_0)], \quad (3.38)$$

из (3.37) получим

$$m(t, x) = \int_{t_0}^t R(t, x; \tau, x_0) g_u(\tau) (v(\tau) - u(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t Q(t, x, \tau) \ell(\tau) d\tau.$$

А отсюда в силу представления (3.33) имеем

$$\begin{aligned} m(t, x) &= \int_{t_0}^t R(t, x; \tau, x_0) g_u(\tau) (v(\tau) - u(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^{\tau} Q(t, x, \tau) F(\tau, s) g_u(s) (v(s) - u(s)) ds \right] d\tau = \\ &= \int_{t_0}^t R(t, x; \tau, x_0) g_u(\tau) (v(\tau) - u(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t \left[\int_{\tau}^t Q(t, x, s) F(s, \tau) ds \right] g_u(\tau) (v(\tau) - u(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Полагая

$$L(t, x, \tau) = R(t, x; \tau, x_0) + \int_{\tau}^t Q(t, x, s) F(s, \tau) ds, \quad (3.39)$$

окончательно будем иметь

$$m(t, x) = \int_{t_0}^t L(t, x, \tau) g_u(\tau) (v(\tau) - u(\tau)) d\tau. \quad (3.40)$$

Следовательно

$$m_x(t, x) = \int_{t_0}^t L_x(t, x, \tau) g_u(\tau) (v(\tau) - u(\tau)) d\tau. \quad (3.41)$$

Используя представления (3.35), (3.40), (3.41) займемся преобразованием отдельных слагаемых в (3.34).

При помощи представление (3.33) получим

$$\ell'(t_1) \varphi_{aa}(a(t_1)) \ell(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} (v(\tau) - u(\tau))' g'_u(\tau) F'(t_1, \tau) \varphi_{aa}(a(t_1)) F(t_1, s) g_u(s) (v(s) - u(s)) ds d\tau, \quad (3.42)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (v(t) - u(t))' M_{ua}(t) \ell(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0}^t \delta u'(\tau) M_{ua}(\tau) F(\tau, t) d\tau \right] g_u(t) (v(t) - u(t)) dt, \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \ell'(t) M_{aa}(t) \ell(t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{t_0}^t F(t, \tau) g_u(\tau) (v(\tau) - u(\tau)) d\tau \right)' M_{aa}(t) \left(\int_{t_0}^t F(t, s) g_u(s) (v(s) - u(s)) ds \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} (v(\tau) - u(\tau))' g'_u(\tau) \left\{ \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} F'(t, \tau) M_{aa}(t) F(t, s) dt \right\} g_u(s) (v(s) - u(s)) ds d\tau, \end{aligned} \quad (3.44)$$

Далее при помощи (3.40), (3.41) доказывается справедливость тождеств

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} m'(t, x) H_{zz}(t, x) m(t, x) dx dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{t_0}^t L(t, x, \tau) g_u(\tau) (v(\tau) - u(\tau)) d\tau \right)' H_{zz}(t, x) \times \\ &\times \left(\int_{t_0}^t L(t, x, s) g_u(s) (v(s) - u(s)) ds \right) dx dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} (v(\tau) - u(\tau))' g'_u(\tau) \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} L'(t, x, \tau) H_{zz}(t, x) L(t, x, s) dx dt \right\} g_u(s) (v(s) - u(s)) ds d\tau, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} m'(t, x) H_{zx}(t, x) m_x(t, x) dx dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{t_0}^t L(t, x, \tau) g_u(\tau) (v(\tau) - u(\tau)) d\tau \right)' H_{zx}(t, x) \times \\ &\times \left(\int_{t_0}^t L_x(t, x, s) g_u(s) (v(s) - u(s)) ds \right) dx dt = \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} (v(\tau) - u(\tau))' g'_u(\tau) \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} L'(t, x, \tau) H_{zx}(t, x) L_x(t, x, s) dx dt \right\} g_u(s) (v(s) - u(s)) ds d\tau, \\ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'_x(t, x) H_{z_x z_x}(t, x) \Delta z_x(t, x) dx dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{t_0}^t L_x(t, x, \tau) g_u(\tau) (v(\tau) - u(\tau)) d\tau \right)' H_{z_x z_x}(t, x) \times \\ &\times \left(\int_{t_0}^t L_x(t, x, s) g_u(s) (v(s) - u(s)) ds \right) dx dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} (v(\tau) - u(\tau))' g'_u(\tau) \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} L'_x(t, x, \tau) H_{z_x z_x}(t, x) L_x(t, x, s) dx dt \right\} g_u(s) (v(s) - u(s)) ds d\tau. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 K(\tau, s) = & -F'(t_1, \tau) \varphi_{aa}(a(t_1)) F(t_1, s) + \\
 + \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} & \left[F'(t, \tau) M_{aa}(t) F(t, s) + \int_{x_0}^{x_1} [L'(t, x, \tau) H_{zz}(t, x) L(t, x, s) + L'(t, x, \tau) H_{zx}(t, x) L_x(t, x, s) + \right. \\
 & \left. + L'_x(t, x, \tau) H_{zz}(t, x) L(t, x, s) + L'_x(t, x, \tau) H_{zx}(t, x) L_x(t, x, s)] dx \right] dt.
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Матричная функция $K(\tau, s)$ является аналогом матричных функций введенные в рассмотрение в работах [15, 16, 29].

Учитывая обозначение (3.48) и тождества (3.42)-(3.47) неравенство (3.34) записывается в виде

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} (v(\tau) - u(\tau))' g'_u(\tau) K(\tau, s) g_u(s) (v(s) - u(s)) ds d\tau + \\
 & + 2 \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0}^{t_1} (v(\tau) - u(\tau))' M_{ua}(\tau) F(\tau, t) d\tau \right] g_u(t) (v(t) - u(t)) dt + \int_{t_0}^{t_1} (v(t) - u(t))' M_{uu}(t) (v(t) - u(t)) dt \leq 0.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 3.3. Для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.6), необходимо чтобы неравенство (3.49) выполнялось для всех $u(t) \in U$, $t \in T$.

Неравенство (3.49) есть интегральное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений и носит довольно общий характер. Из него можно получить, используя произвольность $v(t)$, ряд более легко проверяемых условий оптимальности.

Непосредственным следствием теоремы 3.3. является

Теорема 3.4. При выполнении условий теоремы 3.3 для оптимальности квазиособых управлений $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.6) необходимо, чтобы для всех $\theta \in [t_0, t_1)$, $w \in U$ выполнялся неравенство

$$(w - u(\theta))' M_{uu}(\theta) (w - u(\theta)) \leq 0. \tag{3.50}$$

Неравенство (3.48) есть аналог условия Лежандра-Клебша в случае выпуклой области управления.

Теперь изучим случай вырождения аналога условия Лежандра-Клебша.

Определение 3.2. Квазиособое управление $u(t)$ назовем квазиособым второго порядка управлением, если для всех $w \in U$, $\theta \in [t_0, t_1)$

$$(w - u(\theta))' M_{uu}(\theta) (w - u(\theta)) = 0. \tag{3.51}$$

Теорема 3.5. Если $u(t)$ квазиособое второго порядка управление, то для его оптимальности необходимо, чтобы

$$(w - u(\theta))' [g'_u(\theta) K(\theta, \theta) g_u(\theta) + H_{ux}(\theta) g_u(\theta)] (w - u(\theta)) \leq 0 \tag{3.52}$$

выполнялось для всех $w \in U$ и $\theta \in [t_0, t_1)$.

Неравенство (3.52) есть аналог условия Габасова-Кирилловой полученный в [30, 31] в случае обыкновенной динамической системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. Необходимые условия оптимальности для систем с распределенными параметрами // Математический сборник. 1966, т. 69, № 3, с. 371-421.
2. Егоров А.И. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965, т. 29, № 6, с. 1205-1260.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // В сб.: Оптимальные системы. Статистические методы. М. Наука. 1967, с. 76-92.
4. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск. Изд-во Иркутского Университета. 1989, 160 с.
5. Васильев О.В. Качественные и конструктивные методы оптимизации систем с распределенными параметрами // Автореф. дисс. на соиск. ученой степени д-ра физ.-мат. наук. Ленинград. 1984, 42 с.
6. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М. Наука, 1981, 400с.
7. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск, Наука, 1990, 190 с.
8. Погодаев Н.И. О свойствах решений задачи Гурса-Дарбу с граничными и распределенными управлениями // Сиб. матем. журнал. 2007, № 5, с. 116-1123.
9. Погодаев Н.И. О решениях системы Гурса-Дарбу с распределенными граничными управлениями // Автореф. дисс. на соиск. ученой степени канд. физ. мат. наук. Иркутск. 2009, 18 с.
10. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами описываемых системами Гурса-Дарбу // Журн. Выч. Матем. и Матем. Физики. 1972, № 1, с. 61-72.
11. Плотников В.И., Сумин В.И. Проблемы устойчивости нелинейных систем Гурса-Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972, № 5, с. 845-856.
12. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления // Докл. АН Азерб. ССР. 1972, № 5, с. 12-16.
13. Меликов Т.К. Особые в классическом смысле управления в системах Гурса-Дарбу. Баку. Изд-во «ЭЛМ», 2003, 96 с.
14. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Принцип максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса-Дарбу // Вестн. Удмуртского ун-та. Матем. мех. компьют. наука. 2011, № 2, с. 52-57.
15. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку, Изд-во ЭЛМ, 2010, 360 с.
16. Мансимов К.Б. Исследование особых процессов в задачах оптимального управления // Автореф. дисс. на соиск. уч. степени д-ра физ.-мат. наук. Баку, 1994, 42 с.
17. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М. Наука, 1979, 550 с.
18. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск. Изд-во «Наука и техника», 1974, 272 с.
19. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. Л-д. Изд-во ЛГУ, 1968, 160 с.
20. Срочко В.А. Вычислительные методы оптимального управления. Иркутск. Изд-во Иркутского Ун-та. 1982, 110 с.
21. Гирсанов И.В. Лекции по математической теории экстремальных задач. М. Изд-во МГУ. 1970, 118 с.
22. Мордухович Б.Ш. Метод матрических аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М. Наука, 1988.
23. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М. Наука, 1969.
24. Новоженев М.М., Сумин В.И., Сумин М.И. Методы оптимального управления системами математической физики. Горький. Изд-во ГГУ, 1986, 87 с.
25. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. Наука, 1973, 256 с.
26. Габасов Р., Кириллова Ф.М. и др. Методы оптимизации. Мн. Четыре четверти. 2011, 472 с.
27. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск. Изд-во БГУ, 1973, 256 с.

28. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. Об интегральном представлении решений некоторых дифференциальных уравнений // Изв АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1973, № 2
29. Мансимов К.Б. Об одной схеме исследования особых управлений в системах Гурса-Дарбу // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1981, № 2, с. 100-104.
30. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1970, № 4, с. 665-670.
31. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Об оптимальности особых управлений // Дифференц. уравнения. 1969, № 6, с. 1000-1011.

*PACS: 02.30.Gp; 03.65.Db; 02.70.Bf**UDC: 539.8; 519.6; 530.181*

ORTHOGONALITY RELATION FOR THE CHARLIER POLYNOMIALS WITH RESPECT TO THE CONTINUOUS MEASURE

G.H. GULIYEVA¹, E.I. JAFAROV¹, A.M. JAFAROVA²¹Institute of Physics, Azerbaijan National Academy of Sciences,

H. Javid av. 33, AZ1143,

Baku, AZERBAIJAN

*ejafarov@physics.science.az*²Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Sciences,

B. Vahabzade str. 9, AZ1141,

Baku, AZERBAIJAN

*aynura.jafarova@imm.az***ABSTRACT**

It is known that Charlier polynomials $C_n(x; a)$ are defined in terms of ${}_2F_0$ hypergeometric functions and they satisfy orthogonality relation with respect to a certain discrete measure. There is also well-known interrelation between the Charlier and the Laguerre polynomials. Taking into account that the orthogonality with respect to a certain continuous measure for the Laguerre polynomials already exists, then, new orthogonality relation for the Charlier polynomials of the discrete variable $x > m + n$ is proposed with respect to the continuous measure. The correctness of this orthogonality relation is proved by using known properties of the Pochhammer symbol and Gamma function. Some brief discussions regarding proposed new orthogonality relation for the Charlier polynomials are provided, too.

Keywords: Charlier polynomials; orthogonality relation; hypergeometric functions.

СООТНОШЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ПО НЕПРЕРЫВНОЙ МЕРЕ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ ШАРЛЬЕ АННОТАЦИЯ

Известно, что многочлены Шарлье $C_n(x; a)$ определяются в единицах гипергеометрических функций ${}_2F_0$ и они удовлетворяют соотношению ортогональности по отношению конкретной дискретной меры. Существует также хорошо известное соотношение, связывающее многочлены Шарлье и Лагерра. Принимая во внимание, что уже существует ортогональность по конкретной непрерывной мере для многочленов Лагерра, предложено новое соотношение ортогональности по непрерывной мере для многочленов Шарлье дискретной переменной $x > m + n$. Используя известные свойства символов Похгаммера и Гамма функции, доказывается корректность этого соотношения ортогональности. Некоторые короткие обсуждения по поводу предложенного нового соотношения ортогональности для многочленов Шарлье тоже представлены.

Ключевые слова: полиномы Шарлье; отношение ортогональности; гипергеометрические функции.

ŞARLYE ÇOXHƏDLİLƏRİ ÜÇÜN KƏSİLMƏZ ÖLÇÜYƏ MALİK ORTOQONALLIQ ŞƏRTİ XÜLASƏ

Məlumdur ki, $C_n(x; a)$ çoxhədliləri ${}_2F_0$ hiperhəndəsi funksiyalarının köməyi ilə ifadə olunurlar və onlar müəyyən diskret ölçüyə görə ortoqonallıq münasibətini ödəyirlər. Həmçinin, Şarlye və Lager çoxhədlilərini bir-biri ilə bağlayan ifadə də yaxşı məlumdur. Lager çoxhədliləri üçün müəyyən kəsilməz ölçüyə görə ortoqonallığın mövcudluğunu nəzərə alaraq, $x > m + n$ diskret dəyişənli Şarlye çoxhədliləri üçün kəsilməz ölçüyə malik yeni ortoqonallıq münasibəti təklif edilmişdir. Pochhammer simvolu və Gamma funksiyanın məlum xassələrindən istifadə etməklə, bu ortoqonallıq münasibətinin doğruluğu isbat edilmişdir. Şarlye çoxhədliləri üçün təklif edilmiş yeni ortoqonallıq münasibəti ilə bağlı bəzi qısa müzakirələr də təqdim edilmişdir.

Açar sözlər: Charlier polinamları, ortogonalı əlaqəsi, hipergeometrik funksiyalar.

1. Introduction

The role that the orthogonal polynomials play to understand any analytical solution of the dynamical systems from their statistical point of view is indisputable fact. Usually, all of important problems of the quantum physics, which being solved explicitly have quantization of their energy spectrum, lead to the wave functions described through the orthogonal polynomial of certain type. One needs to note here that in mathematics, orthogonal polynomials themselves arise as solutions to differential or difference equations related to the hypergeometric equations. Currently, there is a list of so-called Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials expressed through the certain hypergeometric functions from simple ${}_2F_0$ to more high ${}_4F_3$ [1]. The simplest one in this scheme is well-known Hermite polynomial that arises in quantum physics as a solution of the non-relativistic harmonic oscillator in the canonical approach [2]. There are also generalizations of the non-relativistic quantum oscillator problem leading to the wave functions expressed through the orthogonal polynomials from Askey-scheme high levels. One-dimensional Wigner quantum oscillator [3] expressed through the Laguerre polynomials [4], Charlier oscillators [5,6], Krawtchouk oscillators [7], Meixner oscillators [6], the relativistic quantum linear and singular oscillators expressed respectively through the Meixner-Pollaczek [8] and continuous dual Hahn polynomials [9] are among them.

Charlier polynomials being on the second level of the so-called Askey-scheme have very interesting orthogonality relation that is the orthogonality with respect to a certain discrete measure. In spite of the simplest well-known interrelation between the Charlier and the Laguerre polynomials, the orthogonality with respect to a certain continuous measure for the Laguerre polynomials fails in the case of the Charlier polynomials. Therefore, the question on the continuous orthogonality relation for the Charlier polynomials still remains open. In this paper, we try to answer to this question and present the new orthogonality relation for the Charlier polynomials for some range of discrete values of the variable x . This orthogonality relation is continuous with respect to the parameter a .

Our paper is structured as follows: Section 2 provides basic definition and already known information about the properties of the Charlier polynomials. The new orthogonality relation and its proof are presented in Section 3.

2. Basic properties of the Charlier polynomials

Charlier polynomials are defined as

$$C_n(x; a) = {}_2F_0 \left(\begin{matrix} -n, -x \\ - \end{matrix}; -\frac{1}{a} \right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(-n)_k (-x)_k}{k! a^k}. \quad (1)$$

They satisfy the following orthogonality relation with respect to the discrete measure

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!} C_m(x; a) C_n(x; a) = a^{-n} e^a n! \delta_{mn}, \quad a > 0, \quad (2)$$

and the following recurrence relation:

$$-xC_n(x; a) = aC_{n+1}(x; a) - (n+a)C_n(x; a) + nC_{n-1}(x; a). \quad (3)$$

One needs to note that they are the solution of the following difference equation

$$-ny(x) = ay(x+1) - (x+a)y(x) + xy(x-1), \quad y(x) = C_n(x; a), \quad (4)$$

as well as the following forward and backward shift operators exist for the Charlier polynomials:

$$C_n(x+1; a) - C_n(x; a) = -\frac{n}{a} C_{n-1}(x; a), \quad (5)$$

$$C_n(x; a) - \frac{x}{a} C_n(x-1; a) = C_{n+1}(x; a). \quad (6)$$

Their another important property is their following connection with the Laguerre polynomials

$$C_n(x; a) = \frac{n!}{(-a)^n} L_n^{(x-n)}(a), \quad (7)$$

where, the Laguerre polynomials are defined as

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k}{k!} (\alpha + k + 1)_{n-k} x^k. \quad (8)$$

3. The new orthogonality relation

In this Section, we propose the new orthogonality relation for the Charlier polynomials $C_n(x; a)$ with respect to the continuous measure a . Our proposal for this new relation is the following:

$$\int_0^\infty e^{-a} a^{x-1} C_m(x-m; a) C_n(x-n; a) da = \frac{n!(x-n)!}{x-2n} \delta_{mn}, \quad x > m+n. \quad (9)$$

The proof of its correctness is easy. First, we use (1) here and rewrite left-hand side of (9) as double sum of the integral relation:

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(-m)_k (m-x)_k}{k!} \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{(-n)_s (n-x)_s}{s!} \int_0^\infty e^{-a} a^{x-k-s-1} da. \quad (10)$$

The integral leads to the well-known Gamma function $\Gamma(x-k-s) = (x-k-s-1)!$, $x-k-s > 0$. One can also apply in both k and s summations the following known properties for the Pochhammer symbol $(a)_k$:

$$\frac{(-m)_k}{k!} = (-1)^k \binom{m}{k} = (-1)^k \binom{m}{m-k}, \quad (m-x)_k = (-1)^k (x-m+1-k)_k, \quad (11)$$

which allows us to re-express (10) as the following:

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{m-k} (x-m+1-k)_k \sum_{s=0}^n (-1)^s \binom{n}{n-s} (x-n+1-s)_s (x-k-s-1)!. \quad (12)$$

Now, we can reverse the order of summation for both k and s series as $k \rightarrow m-k$, $s \rightarrow n-s$ as well as apply the properties of the Pochhammer symbol $(a+k)_{n-k} = (a)_n / (a)_k$ and $(a)_n \Gamma(n) = \Gamma(a+n)$, from where we obtain that

$$(-1)^{n+m} (x-2m+1)_m (x-2n+1)_n (x-m-n-1)! \sum_{k=0}^m \frac{(-m)_k (x-m-n)_k}{k! (x-2m+1)_k} \sum_{s=0}^n \frac{(-n)_s (x-m-n+k)_s}{s! (x-2n+1)_s}. \quad (13)$$

It is easy to observe that the summation by s is the ${}_2F_1$ of the following form:

$$\sum_{s=0}^n \frac{(-n)_s (x-m-n+k)_s}{s! (x-2n+1)_s} = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, x-m-n+k \\ x-2n+1 \end{matrix}; 1 \right). \quad (14)$$

One can apply now the Vandermonde summation formula

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, b \\ c \end{matrix}; 1\right) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}, \quad (15)$$

that simplifies (13) as follows:

$$(-1)^{m+n} (x-2m+1)_m (x-m-n-1)! \sum_{k=0}^m \frac{(-m)_k (x-m-n)_k}{k! (x-2m+1)_k} (m-n+1-k)_n. \quad (16)$$

One can use now another interesting relation for the Pochhammer symbol $(a-k)_n = \frac{(1-a)_k (a)_n}{(1-a-n)_k}$ in order to re-express $(m-n+1-k)_n$ as

$$(m-n+1-k)_n = \frac{(n-m)_k (m+1-n)_n}{(-m)_k}. \quad (17)$$

Inserting (17) in (16) simplifies it as follows:

$$(-1)^{m+n} (x-2m+1)_m (m+1-n)_n (x-m-n-1)! \sum_{k=0}^m \frac{(n-m)_k (x-m-n)_k}{k! (x-2m+1)_k}. \quad (18)$$

Summation by k is also ${}_2F_1$ of the following form

$$\sum_{k=0}^m \frac{(n-m)_k (x-m-n)_k}{k! (x-2m+1)_k} = {}_2F_1\left(\begin{matrix} n-m, x-m-n \\ x-2m+1 \end{matrix}; 1\right) \quad (19)$$

as well as for $(m+1-n)_n$ we have:

$$(m+1-n)_n = (-1)^n (-m)_n = n! \binom{m}{n}. \quad (20)$$

We can use now well-known Gauss summation formula

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad \operatorname{Re}(c-a-b) > 0 \quad (21)$$

that allows writing (18) in more simple formula:

$$(-1)^{m+n} (x-2m+1)_m \binom{m}{n} n! \frac{(x-m-n-1)! (x-2m)!}{(n-m)! (x-n-m)!}. \quad (22)$$

One can combine $(x-2m+1)_m$ and $(x-2m)!$ as $(x-2m+1)_m (x-2m)! = (x-m)!$ and rewrite (22) as follows:

$$(-1)^{m+n} \binom{m}{n} \binom{n}{m} \frac{m! (x-m)!}{x-n-m}. \quad (23)$$

Due to appeared binomial coefficients in the expression, (23) becomes 0 in case of $n \neq m$ whereas the case $n = m$ gives the correct right-hand side of (9), i.e. $n! (x-n)! / (x-2n)$.

4. Conclusions

Charlier polynomials are one of the orthogonal polynomials, which various properties are studied in different aspects [10,11]. One can note here also their uniform asymptotic expansions [12-14], generalizations [15], combinatorics [16] etc. In this letter, we propose the new orthogonality relation for the Charlier polynomials of the discrete variable $x > m+n$ with respect to the continuous measure a and prove the correctness of this proposal. One need to note here that due to the known interrelation between the Charlier and Laguerre polynomials (7), the orthogonality relation for the Charlier polynomials proposed here leads to the following orthogonality relation for the Laguerre polynomials

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-m-n-1} L_m^{(\alpha-2m)}(x) L_n^{(\alpha-2n)}(x) dx = \frac{\Gamma(\alpha-n+1)}{n!(\alpha-2n)} \delta_{mn}, \quad \alpha > m+n,$$

that arises and plays an important role in the analytical solution of the quantum mechanical problem on the Morse oscillator [17]. One can see that it is quite different than well-known orthogonality relation for the Laguerre polynomials [1]

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{mn}, \quad \alpha > -1.$$

5. ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by the Science Development Foundation under the President of the Republic of Azerbaijan – **Grant Nr EIF-KETPL-2-2015-1(25)-56/01/1.**

REFERENCES

1. R. Koekoek, P.A. Lesky and R.F. Swarttouw, Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues, 578 pages. Springer-Verlag, Berlin (2010)
2. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory, 689 pages. Butterworth-Heinemann, Oxford (1981)
3. E.P. Wigner, Do the equations of motion determine the quantum mechanical commutation relations?, Physical Review, Vol.77, No.5, p.711-712, 1950
4. Y. Ohnuki and S. Kamefuchi, Quantum Field Theory and Parastatistics, 490 pages. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1982)
5. N.M. Atakishiyev, E.I. Jafarov, S.M. Nagiyev and K.B. Wolf, Meixner oscillators, Revista Mexicana de Fisica, Vol. 44, No.3, p.235-244, 1998
6. E.I. Jafarov and J. Van der Jeugt, The oscillator model for the Lie superalgebra $sh(2|2)$ and Charlier polynomials, Journal of Mathematical Physics, Vol.54, No.10, 103506, 2013
7. N.M. Atakishiev and S.K. Suslov, Difference analogs of the harmonic oscillator, Theoretical and Mathematical Physics, Vol.85, No.1, p.1055-1062, 1990
8. N.M. Atakishiev, R.M. Mir-Kasimov and Sh.M. Nagiev, Quasipotential models of a relativistic oscillator, Theoretical and Mathematical Physics, Vol.44, No.1, p.592-603, 1980
9. S.M. Nagiyev, E.I. Jafarov and R.M. Imanov, The relativistic linear singular oscillator, Journal of Physics A: Mathematical and General, Vol.36, No.28, p.7813-7824, 2003
10. R. Askey, Orthogonal Polynomials and Special Functions, GBMS Regional Conference Series Volume 21. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1975)
11. A.F. Nikiforov, S.K. Suslov and V.B. Uvarov, Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable, Berlin-Heidelberg – New York: Springer Verlag (1991)
12. B. Rui and R. Wong, Uniform asymptotic expansion of Charlier polynomials, Methods and Applications of Analysis, Vol.1, No.4, p.294-313, 1994
13. T.M. Dunster, Uniform Asymptotic Expansions for Charlier Polynomials, Journal of Approximation Theory, Vol.112, No.1, p.93-133, 2001
14. I. Krasikov, Bounds for Zeros of the Charlier Polynomials, Methods and Applications of Analysis, Vol.9, No.4, p.599-610, 2002
15. H. Bavinck and R. Koekoek, On a Difference Equation for Generalizations of Charlier Polynomials, Journal of Approximation Theory, Vol.81, No.2, p.195-206, 1995
16. J. Labelle and Y.N. Yeh, The Combinatorics of Laguerre, Charlier, and Hermite Polynomials, Studies in Applied Mathematics, Vol.80, No.1, p.25-36, 1989
17. P.M. Morse, Diatomic Molecules According to the Wave Mechanics. II. Vibrational Levels, Physical Review, Vol.34, No.1, p.57-64, 1929

UDC 517.9

THE SYSTEM OF DEGENERATE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PARAMETERS

Hummet K. MUSAEV

Baku State University, Baku, AZERBAIJAN

E-mail: gkm55@mail.ru

ABSTRACT

Here we find sufficient conditions that guarantee the separability of degenerate abstract convolution-elliptic equations in weighted L_p spaces. By using these results the existence and uniqueness of maximal regular solution of the convolution equation with parameters is obtained in weighted L_p spaces. In application, the infinite system of degenerate elliptic integro-differential equations with parameters are obtained.

Key Words: sectorial operators, abstract weighted spaces, operator-valued multipliers, convolution equations, degenerate integro-differential equations, coercive estimate, infinite systems.

PARAMETRLI CIRLAŞAN INTEQRO-DIFERENSIAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİ

XÜLASƏ

İşdə cırılan konvolusion abstrakt-elliptik tənliklərin çəkili L_p -fəzasında separabelliyini təmin edən kafi şərtlər müəyyənləşdirilir. Əldə olunan nəticələrin köməyi ilə parametr daxil olan konvolusion tənliklərin çəkili fəzalarda maksimal-requlyar həllinin varlığı və yeganəliyi göstərilir. Nəhayət, parametrlı cırılan elliptik integro-diferensial tənliklərin sonsuz sistemi öyrənilir və koersitiv qiymətləndirmə alınır.

Açar sözlər: sektorial operatorlar, abstrakt çəkili fəzalar, operator qiymətli multiplikatorlar, konvolusion tənliklər, cırılan integro-diferensial tənliklər, koersitiv qiymətləndirmə, sonsuz sistemlər.

СИСТЕМА ВЫРОЖДЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

РЕЗЮМЕ

Здесь мы находим достаточные условия, гарантирующие сепарабельности вырождающихся абстрактных эллиптических уравнений в свертках в весовых L_p -пространствах. Используя эти результаты, мы получаем существование и единственность максимально-регулярного решения уравнения свертки с параметрами в весовых пространствах. В приложении исследуются бесконечная система вырождающихся эллиптических интегро-дифференциальных уравнений с параметрами и получается коэрцитивная оценка.

Ключевые слова: секториальные операторы, абстрактные весовые пространства, операторно-значные мультипликаторы, уравнения свертки, вырожденные интегро-дифференциальные уравнения, коэрцитивная оценка, бесконечные системы.

1. Introduction

Differential operator equations, have been studied extensively e.g., in [1-3], [8-11], [15-19] and the references therein. Convolution-differential equations (CDEs) have been treated e.g., in [12-14]. The convolution-differential operator equations (CDOEs) are relatively less investigated subject. Note that, the regularity properties of infinite system of integro-differential equations were studied e.g., in [7], [16] and the references therein. In [15] and [16] regularity properties of degenerate CDOEs are studied. The main aim of the present paper is to study the maximal regularity properties of the system of degenerate integro-differential equations with parameters

$$\sum_{|\alpha| \leq l} \varepsilon_{\alpha} a_{\alpha} * D^{[\alpha]} u_m + \sum_{j=1}^{\infty} d_j * u_j = f_m, m = 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

in weighted space $L_{p,\gamma}(R^n; l_q)$, where l is a natural number, $a_\alpha = a_\alpha(x)$ are complex-valued functions, $d_j = d_j(x)$, $u_m = u_m(x)$, $f_m = f_m(x)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, α_k are nonnegative integers, $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_\alpha = \prod_{k=1}^n \varepsilon_k^{\frac{\alpha_k}{l}}$, ε_k are positive parameter. Here, the convolutions $a_\alpha * D^{[\alpha]} u_m$, $d_j * u_j$ are defined in the distribution sense (see e.g., [2]), where $\gamma = \gamma(x)$ is a positive measurable function on $\Omega \subset R^n$ and

$$D^{[\alpha]} = D_{x_1}^{[\alpha_1]} D_{x_2}^{[\alpha_2]} \dots D_{x_n}^{[\alpha_n]}, \quad D_{x_i}^{[\alpha_i]} = \left(\gamma(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{\alpha_i}.$$

In this paper, we establish the uniform separability properties of the parameter dependent infinite system of degenerate integro-differential equations (1.1). The main tools of this work is the theory of operator-valued Fourier multipliers. This fact is derived by using the representation formula for the solution of (1.1) and operator valued multipliers in $L_{p,\gamma}(R^n; l_q)$.

The present paper is organized as follows. The first section in this paper contains an introduction. Section 2 collects definitions, some notations and basic properties of E -valued function spaces, in particular, weighted $L_{p,\gamma}(R^n; l_q)$ space. The third section is devoted to maximal regularity in weighted L_p -spaces and prepares for the proof of the main result of this paper. In section 4 by applying this results the maximal regularity of problem (1.1) is proved.

2. Notation and Definitions

Let us first some notions. Denote the set of natural numbers by $\mathbb{N}$, the set of real numbers by $\mathbb{R}$ and the set of complex numbers by $\mathbb{C}$.

For $1 < q < \infty$ we set

$$l_q = \left\{ \xi; \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty; \|\xi\|_{l_q} = \left(\sum_{i=1}^\infty |\xi_i|^q \right)^{1/q} < \infty, \xi_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Let E be a Banach space and $\gamma = \gamma(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ be a positive measurable weighted function on a R^n . Let $L_{p,\gamma}(R^n; E)$ denote the space of strongly E -valued functions that are defined on R^n with the norm

$$\|f\|_{L_{p,\gamma}} = \|f\|_{L_{p,\gamma}(R^n; E)} = \begin{cases} \left(\int_{R^n} \|f(x)\|_E^p \gamma(x) dx \right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in R^n} [\gamma(x) \|f(x)\|_E], & p = \infty. \end{cases}$$

Moreover, if $p \in (1, \infty)$ and $\gamma(x)$ is a positive measurable function, then

$$L_{p,\gamma}(R^n; l_q) = \left\{ f; f = \{f_i(x)\}_{i=1}^\infty, \|f\|_{L_{p,\gamma}(R^n; l_q)} = \left(\int_{R^n} \|\{f_i(x)\}\|_{l_q}^p \gamma(x) dx \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Clearly, $L_{p,\gamma}(R^n; l_q)$ is a Banachspace. For $\gamma(x) = 1$ we write $L_p(R^n; l_q)$.

The weight $\gamma = \gamma(x)$ satisfy an A_p condition, i.e., $\gamma \in A_p$, $p \in (1, \infty)$ if there is a positive constant C such that

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \gamma(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \gamma^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{p-1} \leq C$$

for all cubes $Q \subset R^n$ (see e.g., [8, Ch.9]).

The result [18] implies that the space l_q for $q \in (1, \infty)$ satisfies multiplier condition with respect to $p \in (1, \infty)$ and the weight functions $\gamma(x) = \prod_{k=1}^n |x_k|^\nu$ for $-\frac{1}{n} < \nu < \frac{1}{n}(p-1)$.

Here,

$$S_\varphi = \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad |\arg \lambda| \leq \varphi\} \cup \{0\}, \quad 0 \leq \varphi < \pi.$$

Let E_1 and E_2 be two Banach spaces and let $B(E_1, E_2)$ denote the space of bounded linear operators from E_1 to E_2 . For $E_1 = E_2 = E$ we denote $B(E, E)$ by $B(E)$.

Let $D(A), R(A)$ denote the domain and range of the linear operator in E , respectively. Let $\text{Ker } A$ denote a null space of A .

A closed linear operator A is said to be φ -sectorial (or sectorial for $\varphi = 0$) in a Banach space E with bound $M > 0$ if $\text{Ker } A = \{0\}$, $D(A)$ and $R(A)$ are dense on E , and $\|(A + \lambda I)^{-1}\|_{B(E)} \leq M|\lambda|^{-1}$ for all $\lambda \in S_\varphi, \varphi \in [0, \pi)$, where I is an identity operator in E . Sometimes $A + \lambda I$ will be written as $A + \lambda$ and will be denoted by A_λ . It is known (see e.g., [17, §1.15.1]) that the fractional powers of the operator A are well defined.

Let $E(A^\theta)$ denote the space $D(A^\theta)$ with the graph norm

$$\|u\|_{E(A^\theta)} = \left(\|u\|_E^p + \|A^\theta u\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Note that the above norms are equivalent for $p \in [1, \infty)$.

Here, $S = S(R^n; E)$ denotes the E -valued Schwartz class, i.e., the space of E -valued rapidly decreasing smooth functions on R^n , equipped with its usual topology generated by seminorms. $S(R^n; \mathbb{C})$ will be denoted by just S .

Let $S'(R^n; E)$ denote the space of all continuous linear operators, $L: S \rightarrow E$, equipped with topology of bounded convergence. Recall $S(R^n; E)$ is norm dense in $L_{p,\gamma}(R^n; E)$ when $1 < p < \infty, \gamma \in A_p$.

$C(R^n, E)$ and $C^{(m)}(R^n; E)$ will denote the spaces of E -valued bounded uniformly strongly continuous and m -times continuously differentiable functions on R^n , respectively.

Here, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, where α_i are integers. An E -valued generalized function $D^\alpha f$ is called a generalized derivative in the sense of Schwartz distributions of the function $f \in S(R^n; E)$ if

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle$$

holds for all $\varphi \in S$.

Let F denote the Fourier transform. Throughout this section the Fourier transformation of a function f will be denoted by $\hat{f}$ and $F^{-1}f = \check{f}$. It is known that

$$F(D_x^\alpha f) = (i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n} \hat{f}, \quad D_\xi^\alpha (F(f)) = F[(-ix_1)^{\alpha_1} \dots (-ix_n)^{\alpha_n} f]$$

for all $f \in S'(R^n; E)$.

Suppose E_1 and E_2 are two Banach spaces. A function $\Psi \in L_\infty(R^n; B(E_1, E_2))$ is called a Fourier multiplier from $L_{p,\gamma}(R^n; E_1)$ to $L_{p,\gamma}(R^n; E_2)$ for $p \in (1, \infty)$ if the map $u \rightarrow Tu = F^{-1}\Psi(\xi)Fu, u \in S(R^n; E_1)$ is well defined and extends to a bounded linear operator

$$T: L_{p,\gamma}(R^n; E_1) \rightarrow L_{p,\gamma}(R^n; E_2)$$

A set $K \subset B(E_1, E_2)$ is called R -bounded (see e.g., [5], [19]) if there is a constant $C > 0$ such that for all $T_1, T_2, \dots, T_m \in K$ and $u_1, u_2, \dots, u_m \in E_1, m \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{\infty} r_j(y) T_j u_j \right\|_{E_2} dy \leq C \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^m r_j(y) u_j \right\|_{E_1} dy,$$

Where $\{r_j\}$ is a sequence of independent symmetric $\{-1; 1\}$ -valued random variables on $[0, 1]$. The smallest C for which the above estimate holds is called the R -bound of K and denoted by $R(K)$.

A Banach space E is said to be a space satisfying the multiplier condition with respect to weighted function γ and $p \in (1, \infty)$ (or multiplier condition with respect to $p \in (1, \infty)$ when $\gamma(x) \equiv 1$) if for any $\Psi \in C^{(n)}(R^n \setminus \{0\}; B(E))$ the R -boundedness of the set

$$\{|\xi|^{|\beta|} D_{\xi}^{\beta} \Psi(\xi) : \xi \in R^n \setminus \{0\}, \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), \beta_k \in \{0, 1\}\}$$

implies that Ψ is a Fourier multiplier in $L_{p,\gamma}(R^n; E)$.

A sectorial operator $A(x), x \in R^n$ is said to be uniformly R -sectorial in a Banach space E if there exists a $\varphi \in [0, \pi)$ such that

$$\sup_{x \in R^n} R(\{[A(x)(A(x) + \xi I)^{-1}] : \xi \in S_{\varphi}\}) \leq M.$$

Note that, in Hilbert spaces every norm bounded set is R -bounded. Therefore, in Hilbert spaces all sectorial operators are R -sectorial.

Let $A = A(x), x \in R^n$ be closed linear operator in E with domain $D(A)$ independent of x . The Fourier transformation of $A(x)$ is a linear operator with the domain $D(A)$ defined as

$$\hat{A}(\xi)u(\varphi) = A(x)u(\hat{\varphi}) \text{ for } u \in S'(R^n; D(A)), \varphi \in S(R^n).$$

(For details see e.g., [2, Section 3]).

Let $h \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$ and $e_k, k = 1, 2, \dots, n$ be the standard unit vectors of R^n ,

$$\Delta_k(h)f(x) = f(x + he_k) - f(x)$$

$A(x)$ is differentiable if there is the limit

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x_k} \right) u = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_k(h)A(x)u}{h}, \quad u \in D(A).$$

in the sense of E -norm.

Let E_0 and E be two Banach spaces, where E_0 is continuously and densely embedded into E . Let l be a natural number. $W_{p,\gamma}^l(R^n; E_0, E)$ denotes the space of all functions from $S'(R^n; E_0)$ such that $L_{p,\gamma}(R^n; E_0)$ and the generalized derivatives $D_k^l u = \frac{\partial^l u}{\partial x_k^l} \in L_{p,\gamma}(R^n; E)$ with the norm

$$\|u\|_{W_{p,\gamma}^l(R^n; E_0, E)} = \|u\|_{L_{p,\gamma}(R^n; E_0)} + \sum_{k=1}^n \|D_k^l u\|_{L_{p,\gamma}(R^n; E)} < \infty.$$

It is clear that

$$W_{p,\gamma}^l(R^n; E_0, E) = W_{p,\gamma}^l(R^n; E) \cap L_{p,\gamma}(R^n; E_0).$$

$W_{p,\gamma}^{[l]}(R^n; E_0, E)$ denotes the space of all functions from $S'(R^n; E_0)$ such that $u \in L_p(R^n; E_0)$ and $D_k^{[l]} u \in L_p(R^n; E)$ with the norm

$$\|u\|_{W_{p,\gamma}^{[l]}(R^n; E_0, E)} = \|u\|_{L_p(R^n; E_0)} + \sum_{k=1}^n \|D_k^{[l]} u\|_{L_p(R^n; E)} < \infty.$$

Note that if $l \geq 2, E$ is a space satisfying the multiplier condition with respect to weighted function γ and $p \in (1, \infty)$, then the above definitions are equivalent with usual definitions (see e.g., in [14]), i.e.

$$\|u\|_{W_{p,\gamma}^l(R^n; E_0, E)} \simeq \|u\|_{L_{p,\gamma}(R^n; E_0)} + \sum_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha u\|_{L_{p,\gamma}(R^n; E)},$$

$$\|u\|_{W_{p,\gamma}^{[l]}(R^n; E_0, E)} \simeq \|u\|_{L_p(R^n; E_0)} + \sum_{|\alpha| \leq l} \|D^{[\alpha]} u\|_{L_p(R^n; E)}.$$

A function $u \in W_{p,\gamma}^{[l]}(R^n; E(A), E)$ satisfying the equation (1.1) a.e., on R^n , is called a solution of the equation (1.1).

3. Infinite system of integro-differential equations with parameters

Consider the following nondegenerate integro-differential equations with parameters

$$\sum_{|\alpha| \leq l} \varepsilon_\alpha a_\alpha * D^\alpha u_m + \sum_{j=1}^{\infty} d_j * u_j = f_m, m = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

where, $\varepsilon, \varepsilon_\alpha$ are parameters, a_α are complex-valued functions defined in (1.1).

In this section we find sufficient conditions that guarantee the separability of the problem (3.1). Note that, section 3, prepares for the proof of the main result of this paper. This facts is derived by using is a Fourier multiplier theorem for operator-valued multiplier functions on vector-valued Banach spaces.

Consider operator functions,

$$\begin{aligned} \sigma_{0\varepsilon}(\xi, \lambda) &= \lambda([\hat{d}_j(\xi)\delta_{jm}] + L_\varepsilon(\xi) + \lambda)^{-1}, \sigma_{1\varepsilon}(\xi, \lambda) = [\hat{d}_j(\xi)\delta_{jm}]([\hat{d}_j(\xi)\delta_{jm}] + L_\varepsilon(\xi) + \lambda)^{-1}, \\ \sigma_{2\varepsilon}(\xi, \lambda) &= \sum_{|\alpha| \leq l} \varepsilon_\alpha |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \hat{a}_\alpha(\xi)(i\xi)^\alpha ([\hat{d}_j(\xi)\delta_{jm}] + L_\varepsilon(\xi) + \lambda)^{-1}, \end{aligned}$$

Where δ_{jm} , $m, j = 1, 2, \dots, \infty$, is the Kronecker symbol.

Lemma 3.1. Assume $[\hat{d}_j(\xi)\delta_{jm}]$ is a uniformly φ -sectorial operator in l_q with $\varphi \in [0, \pi)$ and $a_\alpha \in L_\infty(R^n)$ such that

$$L_\varepsilon(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq l} \varepsilon_\alpha \hat{a}_\alpha(\xi)(i\xi)^\alpha \in S_{\varphi_1}, \quad |L_\varepsilon(\xi)| \geq C \sum_{k=1}^n \varepsilon_k |\hat{a}_{\alpha(l,k)}| |\xi_k|^l, \quad (3.2)$$

For $\alpha(l, k) = (0, 0, \dots, l, 0, 0, \dots, 0)$, i.e., $\alpha_i = 0, i \neq k, \alpha_k = l, i = 1, 2, \dots, n, \varphi_1 \in [0, \pi), \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R^n$ and $\lambda \in S_{\varphi_2}$ with $\varphi_2 \in [0, \pi)$, where $\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 < \pi$, then the operator functions $\sigma_{i\varepsilon}(\xi, \lambda)$ are uniformly bounded, i.e.,

$$\|\sigma_{i\varepsilon}(\xi, \lambda)\|_{B(E)} \leq C, i = 0, 1, 2.$$

Proof. By virtue of [6, Lemma 2.3], for $L_\varepsilon(\xi) \in S_{\varphi_1}, \lambda \in S_{\varphi_2}$ and $\varphi_1 + \varphi_2 < \pi$ there exists a positive constant C such that

$$|\lambda + L_\varepsilon(\xi)| \geq C(|\lambda| + |L_\varepsilon(\xi)|). \quad (3.3)$$

Since $L_\varepsilon(\xi) \in S_{\varphi_1}$ in view of (3.2), (3.3) and resolvent properties of $[\hat{d}_j(\xi)\delta_{jm}]$, the operator function $([\hat{d}_j(\xi)\delta_{jm}] + L_\varepsilon(\xi) + \lambda)^{-1}$ is uniformly bounded for all $\xi \in R^n, \lambda \in S_{\varphi_2}$. Moreover, since $[\hat{d}_j(\xi)\delta_{jm}]$ is a sectorial operator we have

$$\|\sigma_{0\varepsilon}(\xi, \lambda)\|_{B(E)} \leq M|\lambda|(1 + |\lambda| + |L_\varepsilon(\xi)|)^{-1} \leq M_0.$$

Moreover, by resolvent properties of sectorial operator $[\hat{d}_j(\xi)\delta_{jm}]$ we obtain

$$\|\sigma_{1\varepsilon}(\xi, \lambda)\|_{B(E)} \leq 1 + M|\lambda + L_\varepsilon(\xi)|(1 + |\lambda + L_\varepsilon(\xi)|)^{-1} \leq M_1.$$

It is clear to see that

$$\|\sigma_{2\varepsilon}(\xi, \lambda)\|_{B(E)} \leq C \sum_{|\alpha| \leq l} |\lambda| \prod_{k=1}^n \left[\varepsilon_k^{\frac{1}{l}} |\xi| |\lambda|^{-\frac{1}{l}} \right]^{\alpha_k} \|([\hat{d}_j(\xi)\delta_{jm}] + L_\varepsilon(\xi) + \lambda)^{-1}\|_{B(E)}. \quad (3.4)$$

By using the following well known inequality

$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n} \leq C \left(1 + \sum_{k=1}^n y_k^l \right), y_k \geq 0, |\alpha| \leq l, \quad (3.5)$$

For $y_k = \left(\varepsilon_k^{\frac{1}{l}} |\lambda|^{-\frac{1}{l}} |\xi_k| \right)^{\alpha_k}$ we get

$$\|\sigma_{2\varepsilon}(\xi, \lambda)\|_{B(E)} \leq C \sum_{|\alpha| \leq l} |\lambda| \left(1 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k |\xi_k|^l |\lambda|^{-1} \right) |\lambda + L_\varepsilon(\xi)|^{-1}.$$

Taking into account the (3.2)-(3.5) we obtain

$$\|\sigma_{2\varepsilon}(\xi, \lambda)\|_{B(E)} \leq C \left(|\lambda| + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k |\xi_k|^l \right) (|\lambda| + |L_\varepsilon(\xi)|)^{-1} \leq C.$$

Lemma 3.2. Assume (3.2) holds. Suppose $\hat{a}_\alpha, \hat{d}_j \in C^{(n)}(R^n)$, and there exist positive constants C_1, C_2 , such that

$$|\xi|^{|\beta|} |D^\beta \hat{a}_\alpha(\xi)| \leq C_1,$$

$$|\xi|^{|\beta|} |D^\beta \hat{d}_j(\xi)| \leq C_2, \beta_k \in \{0, 1\}, \xi \in R^n \setminus \{0\}, 0 \leq |\beta| \leq n.$$

Then, operators $|\xi|^{|\beta|} D_\xi^\beta \sigma_{i\varepsilon}(\xi, \lambda) i = 0, 1, 2$ are uniformly bounded.

Proof. By using a similar technique as in [13] we obtain the

$$|\xi|^{|\beta|} D^\beta \sigma_{i\varepsilon}(\xi, \lambda) i = 0, 1, 2.$$

Now first we establish coercive estimate for nondegenerate case equation (1.1) and apply them to study regularity of the degenerate equation with parameters. Consider the following nondegenerate CDOE

$$\sum_{|\alpha| \leq l} \varepsilon_\alpha a_\alpha * D^\alpha u_m + \sum_{j=1}^n (d_j + \lambda) * u_j = f_m, \quad (3.6)$$

in weighted space $L_{p,\gamma}(R^n; l_q)$, where l is a natural number, $a_\alpha = a_\alpha(x)$ are complex-valued functions, $d_j = d_j(x)$, $u_m = u_m(x)$, $f_m = f_m(x)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, α_k are nonnegative integers $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_\alpha = \prod_{k=1}^n \varepsilon_k^{\frac{\alpha_k}{l}}$, ε_k are positive, λ is a complex parameter. Here, the convolutions $a_\alpha * D^\alpha u_m$, $d_j * u_j$ are defined in the distribution sense (see e.g., [2]).

For $1 < q < \infty$ we set

$$l_q = \left\{ \xi; \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty; \|\xi\|_{l_q} = \left(\sum_{i=1}^\infty |\xi_i|^q \right)^{1/q} < \infty, \quad \xi_i - \text{complex numbers} \right\}.$$

Moreover, if $\gamma(x)$ is a positive measurable function, and if $1 < p < \infty$, then

$$L_{p,\gamma}(R^n; l_q) = \left\{ f; f = \{f_i(x)\}_{i=1}^\infty; \|f\|_{L_{p,\gamma}(R^n; l_q)} = \left(\int_{R^n} \|\{f_i(x)\}\|_{l_q}^p \gamma(x) dx \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Clearly, $L_{p,\gamma}(R^n; l_q)$ is a Banach space. It is known that

$$\|f\|_{L_{p,\gamma}(R^n; l_q)} = \left(\int_{R^n} \left(\sum_{i=1}^\infty |f_i(x)|^q \right)^{p/q} \gamma(x) dx \right)^{1/p},$$

$$\text{Let } d(x) = \{d_m(x)\}, d_m > 0, u = \{u_m\}, d * u = \{d_m * u_m\},$$

$$l_q(d) = \left\{ u \in l_q, \|u\|_{l_q(d)} = \left(\sum_{m=1}^\infty |d_m(x) * u_m|^q \right)^{1/q} < \infty \right\}, 1 < q < \infty.$$

Let

$$X = L_{p,\gamma}(R^n; l_q), Y = W_{p,\gamma}^l(R^n; l_q(d), l_q), p \in (1, \infty).$$

Theorem 3.1. Assume that the all conditions of the Lemma 3.2 are satisfied and l_q satisfying the multiplier condition with respect to weighted function $\gamma \in A_p$ and $p \in (1, \infty)$. Let $[\hat{d}_j(\xi)\delta_{jm}]$ be a uniformly R -sectorial operator in l_q with $\varphi \in [0, \pi)$, $\lambda \in S_{\varphi_2}$ and $0 \leq \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 < \pi$. Then, problem (3.6) has a unique solution u and the coercive uniform estimate holds

$$\sum_{|\alpha| \leq l} \varepsilon_\alpha |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \|a_\alpha * D^\alpha u\|_X + \|d_j(x)\delta_{jm} * u\|_X + |\lambda| \|u\|_X \leq C \|f\|_X \quad (3.7)$$

for all $f \in X$.

Proof. By applying the Fourier transform to equation (3.6) we get

$$\hat{u}(\xi) = ([\hat{d}_j(\xi)\delta_{jm}] + L_\varepsilon(\xi) + \lambda)^{-1} \hat{f}(\xi). \quad (3.8)$$

Hence, the solution of (3.6) can be represented as $u(x) = F^{-1}([\hat{d}_j(\xi)\delta_{jm}] + L_\varepsilon(\xi) + \lambda)^{-1} \hat{f}$.

Using [14, Theorem 2.1] from (3.8) we obtain

$$|\lambda| \|u\|_X \leq C_0 \|f\|_X, \quad \| [d_j(x)\delta_{jm}] * u \|_X \leq C_1 \|f\|_X,$$

$$\sum_{|\alpha| \leq l} \varepsilon_\alpha |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \|a_\alpha * D^\alpha u\|_X \leq C_2 \|f\|_X,$$

for all $f \in X$. By using a similar technique as in [13] and [15] we get the assertion.

Let O_ε be an operator in X generated by problem (3.6) for $\lambda = 0$, i.e.,

$$D(O_\varepsilon) \subset Y, O_\varepsilon u = \sum_{|\alpha| \leq l} \varepsilon_\alpha a_\alpha * D^\alpha u_m + d_j * u_j.$$

From Theorem 3.1 we have:

Result 3.1. Assume that the all conditions of Theorem 3.1 hold. Then, for all $\lambda \in S_{\varphi_2}$ the following uniform coercive estimate holds

$$\sum_{|\alpha| \leq l} \varepsilon_\alpha |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \|a_\alpha * D^\alpha (O_\varepsilon + \lambda)^{-1}\|_{B(X)} + \| [d_j(x)\delta_{jm}] * (O_\varepsilon + \lambda)^{-1} \|_{B(X)} + \|\lambda (O_\varepsilon + \lambda)^{-1}\|_{B(X)} \leq C.$$

Theorem 3.1 particularly implies that the operator O_ε is uniformly sectorial in X ; moreover, if $[\hat{d}_j(\xi)\delta_{jm}]$ is uniformly R -sectorial for $\varphi \in ((\pi/2), \pi)$, then the operator O_ε is a negative generator of an analytic semigroup in X (see e.g., [17, §1.14.5]).

In this work we rely on the recent paper by [12] and [14] where the corresponding problem is studied extensively.

4. Infinite system of degenerate integro-differential equations with parameters

Now we are ready to present our main results. We find sufficient conditions that guarantee the separability of the problem (1.1). Consider the following infinite system of convolution equation

$$\sum_{|\alpha| \leq l} \varepsilon_\alpha a_\alpha * D^{[\alpha]} u_m + \sum_{j=1}^{\infty} (d_j + \lambda) * u_j = f_m, \quad (4.1)$$

where $\varepsilon, \varepsilon_\alpha, \lambda$ are parameters, a_α are complex-valued functions defined in (1.1) and

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad a_\alpha = a_\alpha(x), \quad \varepsilon_\alpha = \prod_{k=1}^n \varepsilon_k^{\frac{\alpha_k}{l}}, \quad u_j = u_j(x), \quad d_j = d_j(x), \quad f_m = f_m(x).$$

Here, the convolutions $a_\alpha * D^{[\alpha]} u_m, d_j * u_j$ are defined distribution sense (see e.g., [2]) and

$$D^{[\alpha]} = D_{x_1}^{[\alpha_1]} D_{x_2}^{[\alpha_2]} \dots D_{x_n}^{[\alpha_n]}, \quad D_{x_k}^{[\alpha_k]} = \left(\gamma(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^{\alpha_k}.$$

$\gamma(x) = \prod_{k=1}^n |x_k|^\nu$, $-\frac{1}{n} < \nu < \frac{p-1}{n}$ is a positive measurable weighted function.

Let Q_ε denote the differential operator in $L_{p,\gamma}(R^n; l_q)$ generated by (4.1) for $\lambda = 0$.

$$\tilde{X} = L_{p,\gamma}(R^n; l_q), \quad \tilde{Y} = W_{p,\gamma}^{[l]}(R^n; l_q(d), l_q), \quad B = B(\tilde{X}).$$

In this section we show the following result:

Theorem 4.1. Assume that the all conditions of the Lemma 3.2 are satisfied and $\{d_j(x)\}_1^\infty \in l_q$, for all $x \in R^n$ and some $x_0 \in R^n$,

$$C_1 |d_j(x_0)| \leq |d_j(x)| \leq C_2 |d_j(x_0)|.$$

Then: (a) for all

$$f(x) = \{f_m(x)\}_1^\infty \in L_p(R^n; l_q(d)),$$

For $\lambda \in S_\varphi$, $\varphi \in [0, \pi)$ problem (4.1) has a unique solution $u = \{u_m(x)\}_1^\infty$ that belongs to $\tilde{Y}$ and the following coercive estimate holds

$$\sum_{|\alpha| \leq l} \varepsilon_\alpha |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \left(\int_{R^n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |a_\alpha * D^{[\alpha]} u_m|^q \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{R^n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} (d_j + \lambda) * u_j \right|^q \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{R^n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |f_m|^q \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}};$$

(b) For $\lambda \in S_\varphi$ there exists a resolvent $(Q_\varepsilon + \lambda)^{-1}$ and

$$\sum_{|\alpha| \leq l} |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \|a_\alpha * [D^{[\alpha]}(Q_\varepsilon + \lambda)^{-1}]\|_{B(\tilde{X})} + \|d * (Q_\varepsilon + \lambda)^{-1}\|_{B(\tilde{X})} + \|\lambda(Q_\varepsilon + \lambda)^{-1}\|_{B(\tilde{X})} \leq C.$$

Proof. For this proof first we consider the following substitution

$$y_k = \int_0^{x_k} \gamma^{-1}(z) dz, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2)$$

It is clear that, under the substitution (4.2), $D^{[\alpha]}u$ transforms to $D^\alpha u$. Moreover, the spaces $L_p(R^n; l_q)$, $W_{p,\gamma}^{[l]}(R^n; l_q(d), l_q)$ are mapped isomorphically onto the weighted spaces $L_{p,\gamma}(R^n; l_q)$, and $W_{p,\gamma}^l(R^n; l_q(d), l_q)$ respectively where,

$$\gamma = \tilde{\gamma}(y) = \gamma(x(y)) = \gamma(x_1(y_1), x_2(y_2), \dots, x_n(y_n)).$$

Moreover, under (4.2) the degenerate problem (4.1) considered in $L_p(R^n; l_q)$ is transformed into the nondegenerate problem (3.6) in $L_{p,\gamma}(R^n; l_q)$, where

$$a_\alpha = a_\alpha(y) = a_\alpha(\tilde{\gamma}(y)), \quad u_j = u_j(y) = u_j(\tilde{\gamma}(y)) \\ [d_j \delta_{jm}] = [\tilde{d}_j(y) \delta_{jm}] = [d_j(\tilde{\gamma}(y)) \delta_{jm}], \quad f_m = f_m(y) = f_m(\tilde{\gamma}(y)).$$

Then it is easy to see that $[\hat{d}_j(\xi) \delta_{jm}]$ is uniformly R -sectorial in l_q and the all conditions of Theorem 3.1 hold. Moreover, the space l_q satisfies the multiplier condition with respect to power weighted function $\gamma(x) = |x|^\nu$, $-\frac{1}{n} < \nu < \frac{p-1}{n}$ and $p \in (1, \infty)$. Therefore, by virtue of Theorem 3.1 we obtain the

$$\sum_{|\alpha| \leq l} \varepsilon_\alpha |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{t}} \|a_\alpha * D^{[\alpha]} u_m\|_{\tilde{X}} + \left\| \sum_{j=1}^{\infty} (d_j * u_j) \right\|_{\tilde{X}} + |\lambda| \|u_j\|_{\tilde{X}} \leq C \|f_m\|_{\tilde{X}}$$

From this we get that assertion (a). Taking into account Theorem 3.1, substitution (4.2) and Result 3.1. we have for all $\lambda \in S_\varphi$ there exist the resolvent of operator Q_ε and has the estimate

$$\sum_{|\alpha| \leq l} \varepsilon_\alpha |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{t}} \|a_\alpha * [D^{[\alpha]}(Q_\varepsilon + \lambda)^{-1}]\|_{B(\tilde{X})} + \|d * (Q_\varepsilon + \lambda)^{-1}\|_{B(\tilde{X})} + \|\lambda(Q_\varepsilon + \lambda)^{-1}\|_{B(\tilde{X})} \leq C.$$

From this we get that the assertion (b) is obtained.

REFERENCES

1. R. Agarwal, D. O' Regan, V. B. Shakhmurov, Separable anisotropic differential operators in weighted abstract spaces and applications, J. Math. Anal. Appl. 338 (2008), 970-983.
2. H. Amann, Operator-valued Fourier multipliers, vector-valued Besov spaces, and applications, Math. Nachr. 186 (1997), 5-56.
3. W. Arendt, S. Bu, Tools for maximal regularity, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1 (2003), 317-336.
4. O. V. Besov, V. P. Ilin, S. M. Nikolskii, Integral representations of functions and embedding theorems, Moscow, 1975 (in Russian); English transl. V. H. Winston & Sons, Washington, D. C, 1979.
5. R. Denk, M. Hieber, J. Prüss, R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type, Mem. Amer. Math. Soc. 166 (2003), n.788.
6. G. Dore G, S. Yakubov, Semigroup estimates and non coercive boundary value problems, Semigroup Form, 60 (2000), 93-121.
7. A. Favini A, G. R. Goldstein, J. A. Goldstein and Romanelli, Degenerate second order differential operators generating analytic semigroups in L_p and $W^{1,p}$, Math. Nachr. 238 (2002), 78 -- 102.
8. L. Grafakos L., Modern Fourier analysis, volume 250 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, second edition, 2009.
9. V.S. Guliev To the theory of multipliers of Fourier integrals for functions with values in Banach spaces, Trudy Math. Inst. Steklov, V.214, 17 (1996), 164-181.
10. V. Keyantuo, C. Lizama, Maximal regularity for a class of integro-differential equations with infinite delay in Banach spaces, Studia Math. 168 (2005), 25-50.

11. S. G. Krein, Linear differential equations in Banach space, American Mathematical Society, Providence, 1971.
12. H. K. Musaev, V. B. Shakhmurov, Regularity properties of degenerate convolution-elliptic equations, Bound. Value Probl., 2016:50 (2016), 1-19.
13. Musaev H.K., Shakhmurov V.B., B-coercive convolution equations in weighted function spaces and applications, Ukr. math. journ. V. 69, N.10, 2017, 1385-1405.
14. V. B. Shakhmurov, Separable convolution-elliptic operator with parameters, Form. Math. 27(6) (2015), 2637-2660.
15. V. B. Shakhmurov, H. K. Musaev, Separability properties of convolution-differential operator equations in weighted L_p spaces, Appl. and Compt. Math. 14(2) (2015), 221-233.
16. V. B. Shakhmurov, R. V. Shakhmurov, Maximal B-regular integro-differential equations, Chin. Ann. Math. Ser. B, 30B(1), (2008), 39-50
17. H. Triebel, Interpolation theory. Function spaces. Differential operators, North-Holland, Amsterdam, 1978.
18. H. Triebel, Spaces of distributions with weights. Multiplier in L_p - spaces with weights. Math. Nachr., (1977) 78, 339-355.
19. L. Weis, Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p - regularity, Math. Ann. 319, (2001), 735-758.

UOT: 517.982.4

О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ИЗ ГРАНД ГРАНД ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА-МОРРИ

Алик М. НАДЖАФОВ^{1,2}, Саин Т. АЛЕКБЕРЛИ³

¹ Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет

² Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

³ Бакинский Инженерный Университет

Баку, АЗЕРБАЙДЖАН

РЕЗЮМЕ

В работе построены гранд грандпространства Соболева-Морри, с помощью методом интегрального представленияизучены с точки зрения теории вложения некоторые свойства функций, определенных в n – мерных областях удовлетворяющих условию гибкого λ – рога, из построенных пространств. Другими словами, доказана теорема вложения в этих пространствах и изучены принадлежность классу Гельдера обобщенных смешанных производных функций из этих пространств.

Ключевые слова. “гранд гранд ” пространства Лебега-Морри и Соболева-Морри, теорема вложения, условие Гельдера.

MSC (2010) 46E35, 46E30, 26D15

GRAND GRAND SOBOLEV-MORRI FƏZASINDAN OLAN FUNKSIYALARIN XASSƏLƏRİ XÜLASƏ

Bu işdə yeni grandgrand Sobolev-Morri fəzası qurulur və daxilolma nəzəriyyəsi nöqtəyi-nəzərinə, “çevik buynuz” şərtini ödəyən n – ölçülü oblastlarda təyin olunmuş və qurulan fəzalardan olan funksiyaların integral göstərilisləri üsulu ilə bir sıra xassələri öyrənilir. Başqa sözlə, bu fəzalarda daxilolma teoremləri və bu fəzalardan olan funksiyaların ümumiləşmiş qarışıq törəmələrinin Hölder sinfinə daxil olması isbat olunur.

ON PROPERTIES FUNCTIONS FROM GRAND GRAND SOBOLEV-MORREY SPACES

ABSTRACT

In this paper, a grand grandSobolev-Morrey space is constructed and with the help of the integral representation method, from the point of view of the embedding theory, some properties of functions defined in n – dimensional domains satisfying the flexible horn condition were studied from the constructed spaces. In other words, the embedding theorem was proved in these spaces and the generalized mixed derivatives of functions from these spaces were studied as belonging to the Hölder class.

Введение

В этой работе сначала построена модификации пространства Лебега-Морри, называемые гранд гранд пространства Лебега-Морри и на базе этого пространства построена гранд гранд пространства Соболева-Морри. Далее с помощью методом интегрального представления функций, определенных в n - мерных областях, удовлетворяющих условию гибкого λ – рога изучены дифференциальные и дифференциально-разностные свойства функции из построенных пространств. Это пространство обозначаем через $W_{p,\chi,a}^l(G)$ ($l \in \mathbb{N}$, $p \in (1, \infty)$, $\chi \in (0, \infty)^n$, $a \in [0,1]$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $mes G < \infty$). Отметим, что гранд пространства Лебега $L_p(G)$, $1 < p < \infty$, по ограниченному множеству $G \subset \mathbb{R}^n$ ввели в 1992 г. Т. Iwaniec и С. Sbordone[3], а в дальнейшем малые пространства Лебега, гранд гранд прос-

транства Лебега-Морри, гранд пространства Соболева-Морри введена (различными нормами) и изучены в работах [2,5-9,11-14]. Отметим, что в этой работе доказано, что «показатель гильдеровости» больше чем в работах [4,10].

Пусть G -ограниченная область пространства $R^n, t \geq 0$ для любого $x \in R^n$ положим

$$G_{t^z}(x) = G \cap I_{t^z}(x) = G \cap \left\{ y : |y_j - x_j| < \frac{1}{2} t^{z_j}, j = 1, 2, \dots, n \right\},$$

Определение. Обозначим через $W_{p,\chi,a}^l(G)$ пространство локально суммируемых на G функций f имеющих на G обобщенные производные $D_i^{l_i} f$ ($i = 1, 2, \dots, n$) с конечной нормой

$$\|f\|_{W_{p,\chi,a}^l(G)} = \|f\|_{W_{p,\chi,a}^l(G)} + \sum_{i=1}^n \|D_i^{l_i} f\|_{W_{p,\chi,a}^l(G)} \quad (1)$$

$$\|f\|_{L_{p,\chi,a}(G)} = \|f\|_{L_{p,\chi,a}(G)} = \sup_{\substack{x \in G \\ 0 < t \leq d \\ 0 < \varepsilon < s_{\max}}} \left(\frac{1}{t^{|\chi|a - \alpha \varepsilon}} \frac{\varepsilon}{|G_{t^z}(x)|} \int_{G_{t^z}(x)} |f(y)|^{p-\varepsilon} dy \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}, \quad (2)$$

здесь d - диаметр $G, s_{\max} = \min \left\{ p-1, \frac{|\chi|a}{\alpha} \right\}, \alpha > 0$.

Отметим ряд свойств пространств $L_{p,\chi,a}(G)$ и $W_{p,\chi,a}^l(G)$

1. При любых $\chi \in (0, \infty), a \in [0, 1]$ имеют место вложения

$$L_{p,\chi,a}(G) \hookrightarrow L_p(G), \quad W_{p,\chi,a}^l(G) \hookrightarrow W_p^l(G)$$

т.е.

$$\|f\|_{p,G} \leq C \|f\|_{p,\chi,a,G}; \quad \|f\|_{W_p^l(G)} \leq c \|f\|_{W_{p,\chi,a}^l(G)}, \quad (3)$$

$$\|f\|_{W_p^l(G)} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|G|} \int_G |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

2. Пространства $L_{p,\chi,a}(G)$ и $W_{p,\chi,a}^l(G)$ являются полными.

$$\|f\|_{p,\chi,0,G} = \|f\|_{p,G}, \quad \|f\|_{W_{p,\chi,0}^l(G)} = \|f\|_{W_p^l(G)}$$

Пусть $\varphi(\cdot, y, z) \in C_0^\infty(R^n)$ и

$$S(\varphi) = \sup_{p \varphi \subset I_1} \left\{ y : |y_j| < \frac{1}{2}, j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

$0 < T \leq T, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_j > 0, j = 1, 2, \dots, n$ и положим

$$V = \bigcup_{0 < t \leq T} \left\{ y : \left(\frac{y}{t^\lambda} \right) \in S(\varphi) \right\},$$

Пусть U - открытое множество, содержащееся в области G и будем считать, что $U+V \subset G$ и

$$G_T(U) = (U + I_{T^z}(x)) \cap G = Q$$

Заметим, что если $0 < \chi_j \leq \lambda_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad I_{T^z} \subset I_{T^\lambda}$, то, следовательно $U+V \subset G$

Лемма. Пусть $1 < p < q \leq r \leq \infty, |\chi| \leq \frac{|\lambda| + \alpha \varepsilon}{1 + a}, 0 < t, \eta \leq T \leq 1, 0 < \gamma < \gamma_0$

(γ_0 -фиксированное положительное число), $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $\nu_j \geq 0$ -целые ($j = 1, 2, \dots, n$), $\psi \in L_{p, \chi, a}(G)$ и пусть

$$\bar{\mu}_i = \lambda_i l_i - (\nu, \lambda) - (|\lambda| - |\chi|a - |\chi| + \alpha\varepsilon) \left(\frac{1}{p-\varepsilon} - \frac{1}{q-\varepsilon} \right) \quad (4)$$

$$\Gamma^{\text{де}}(\nu, \lambda) = \sum_{j=1}^n \nu_j \lambda_j, \quad |\lambda| = \sum_{j=1}^n \lambda_j,$$

$$E_\eta^i(x) = \int_0^\eta t^{-1-|\lambda|-(\nu, \lambda)+\lambda_i l_i} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x+y) \varphi\left(\frac{y}{t^\lambda}, \frac{\rho(t^\lambda, x)}{t^\lambda}, \rho'(t^\lambda, x)\right) dy dt, \quad (5)$$

$$E_{\eta, T}^i(x) = \int_0^T t^{-1-|\lambda|-(\nu, \lambda)+\lambda_i l_i} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x+y) \varphi\left(\frac{y}{t^\lambda}, \frac{\rho(t^\lambda, x)}{t^\lambda}, \rho'(t^\lambda, x)\right) dy dt, \quad (6)$$

$$\rho'(u, x) = \frac{\partial}{\partial u} \rho(u, x). \text{ Тогда}$$

$$\sup_{\bar{x} \in U} \|E_\eta^i\|_{q-\varepsilon, U_{\gamma\chi}(\bar{x})} \leq C_1 \|\psi\|_{p, \chi, a; G} \varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \eta^{\bar{\mu}_i}, \quad (\bar{\mu}_i > 0), \quad (7)$$

$$\sup_{\bar{x} \in U} \|E_{\eta, T}^i\|_{q-\varepsilon, U_{\gamma\chi}(\bar{x})} \leq C_2 \|\psi\|_{p, \chi, a; G} \varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \begin{cases} T^{\bar{\mu}_i}, \bar{\mu}_i > 0 \\ \ln \frac{T}{\eta}, \bar{\mu}_i = 0 \\ \eta^{\bar{\mu}_i}, \bar{\mu}_i < 0 \end{cases} \quad (8)$$

Здесь $U_{\gamma\chi}(\bar{x}) = \left\{ x : |x_j - \bar{x}_j| < \frac{1}{2} \gamma^{\chi_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \right\}$, C_1 и C_2 -константы независимые от φ, γ, η, T .

Доказательство. Применяя обобщенное неравенство Минковского для любого $\bar{x} \in U$ и $0 < \varepsilon < s_{\max}$ имеем

$$\|E_\eta^i\|_{q-\varepsilon, U_{\gamma\chi}(\bar{x})} \leq \int_0^\eta t^{-1-|\lambda|-(\nu, \lambda)+\lambda_i l_i} \|A(\cdot, t)\|_{q-\varepsilon, U_{\gamma\chi}(\bar{x})} dt, \quad (9)$$

$$\text{где } A(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x+y) \varphi\left(\frac{y}{t^\lambda}, \frac{\rho(t^\lambda, x)}{t^\lambda}, \rho'(t^\lambda, x)\right) dy.$$

В силу неравенства Гельдера ($q \leq r$) имеем

$$\|A(\cdot, t)\|_{q-\varepsilon, U_{\gamma\chi}(\bar{x})} \leq \|A(\cdot, t)\|_{r-\varepsilon, U_{\gamma\chi}(\bar{x})} \gamma^{|\chi| \left(\frac{1}{q-\varepsilon} - \frac{1}{r-\varepsilon} \right)} \quad (10)$$

Пусть χ -характеристическая функция множества $S(\varphi)$ и $1 < p < r \leq \infty$, $s \leq r$ $\left(\frac{1}{s} = 1 - \frac{1}{p-\varepsilon} + \frac{1}{r-\varepsilon} \right)$,

$$|\psi\varphi| = \left(|\psi|^{p-\varepsilon} |\varphi|^s \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(|\psi|^{p-\varepsilon} \chi \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon} - \frac{1}{r-\varepsilon}} \left(|\varphi|^s \right)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r-\varepsilon}}$$

и применяя неравенства Гельдера $\left(\frac{1}{r-\varepsilon} + \left(\frac{1}{p-\varepsilon} - \frac{1}{r-\varepsilon} \right) + \frac{1}{s} - \frac{1}{r-\varepsilon} = 1 \right)$ и $|\varphi(x, y, z)| \leq C |\varphi_1(x)|$

имеем

$$\|A(\cdot, t)\|_{q-\varepsilon, U_{\gamma^z}(\bar{x})} \leq C_1 \sup_{x \in U_{\gamma^z}(\bar{x})} \left(\int_{R^n} |\psi(x+y)|^{p-\varepsilon} \chi\left(\frac{y}{t^\lambda}\right) dy \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon} - \frac{1}{r-\varepsilon}} \times \sup_{y \in V} \left(\int_{U_{\gamma^z}(\bar{x})} |\psi(x+y)|^{p-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{r-\varepsilon}} \left(\int_{R^n} \left| \phi_1\left(\frac{y}{t^\lambda}\right) \right|^s \right)^{\frac{1}{s}}. \quad (11)$$

При любом $0 < t \leq 1$, $\chi \leq \lambda$, $x \in U$, то $Q_{t^\lambda}(x) \subset Q_{t^\lambda}(x)$ и получим

$$\begin{aligned} \int_{R^n} |\psi(x+y)|^{p-\varepsilon} \chi\left(\frac{y}{t^\lambda}\right) dy &\leq \int_{Q_{t^\lambda}(x)} |\psi(y)|^{p-\varepsilon} dy \leq \int_{Q_{t^\lambda}(x)} |\psi(y)|^{p-\varepsilon} dy = \\ &= \|\psi\|_{p-\varepsilon, Q_{t^\lambda}(x)}^{p-\varepsilon} \leq \|\psi\|_{p, Q_{t^\lambda}(x)}^{p-\varepsilon} |Q_{t^\lambda}(x)| \varepsilon^{-1} \leq \|\psi\|_{p, \chi, a; Q}^\varepsilon \varepsilon^{-1} t^{|\chi|a - \alpha\varepsilon + |\chi|}, \end{aligned} \quad (12)$$

при $y \in V$

$$\int_{U_{\gamma^z}(\bar{x})} |\psi(x+y)|^{p-\varepsilon} dx \leq \int_{U_{\gamma^z}(\bar{x}+y)} |\psi(x)|^{p-\varepsilon} dx = \|\psi\|_{p-\varepsilon, Q_{\gamma^z}(\bar{x}+y)}^{p-\varepsilon} \leq \|\psi\|_{p, Q_{\gamma^z}(\bar{x}+y)}^{p-\varepsilon} \varepsilon^{-1} |Q_{\gamma^z}(x)| \leq \|\psi\|_{p, \chi, a; Q}^{p-\varepsilon} \varepsilon^{-1} \gamma^{|\chi|a + |\chi| - \alpha\varepsilon}, \quad (13)$$

$$\int_{R^n} \left| \phi_1\left(\frac{y}{t^\lambda}\right) \right|^s dy = t^{|\lambda|} \|\phi_1\|_s^s. \quad (14)$$

Из неравенства (1.10-1.14) при $r = q$ получим

$$\|A(\cdot, t)\|_{q-\varepsilon, U_{\gamma^z}(\bar{x})} \leq C_1 \|\phi_1\|_s \|\psi\|_{p, \chi, a; Q}^{p-\varepsilon} \varepsilon^{-1} \gamma^{\frac{|\lambda|a + |\chi| - \alpha\varepsilon}{q-\varepsilon}} \eta^{\bar{\mu}_i} \quad (\bar{\mu}_i > 0). \quad (15)$$

Подставляя (15) в (9) приходим к (7). Аналогично доказывается неравенство (8).

Докажем две теоремы о свойствах функций из пространства $W_{p, \chi, a}^l(G)$.

Теорема 1. Пусть открытое ограниченное множество $G \subset R$ удовлетворяет условию гибкого λ -рога ($\lambda \in (0, \infty)^n$) (см. [1]); $1 < p < q \leq \infty$; $|\chi| \leq \frac{|\lambda| + \alpha\varepsilon}{1+a}$; ($j = 1, 2, \dots, n$); $\bar{\mu}_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) целые и пусть $f \in W_{p, \chi, a}^l(G)$.

Тогда $D^\nu : W_{p, \chi, a}^l(G) \mapsto L_{q-\varepsilon}(G)$ ($0 < \varepsilon < s_{\max}$) и справедливо неравенства

$$\|D^\nu f\|_{q-\varepsilon, G} \leq C(\varepsilon) \left(T^{\bar{\mu}_0} \|f\|_{p, \chi, a; G} + \sum_{i=1}^n \|D^{l_i} f\|_{p, \chi, a; G} \right), \quad (16)$$

где $\bar{\mu}_0 = \bar{\mu}_i - \lambda_i l_i$. В частности, если

$$\bar{\mu}_{i0} = \lambda_i l_i - (\nu, \lambda) - (|\lambda| - |\chi|a - |\chi| + \alpha\varepsilon) \frac{1}{p-\varepsilon} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

то $D^\nu f$ непрерывна на G и

$$\sup_{x \in G} |D^\nu f(x)| \leq C(\varepsilon) \left(T^{\bar{\mu}_{i,0}} \|f\|_{p, \chi, a; G} + \sum_{i=1}^n T^{\bar{\mu}_{i,0}} \|D^{l_i} f\|_{p, \chi, a; G} \right), \quad (17)$$

здесь $\bar{\mu}_{i,0} = \bar{\mu}_{i,0} - \lambda_i l_i$, $0 < T \leq 1$, $C(\varepsilon)$ константа не зависит от f и T .

Доказательство. В условиях нашей теоремы существует обобщенные производные $D^\nu f$. Действительно, если $\bar{\mu}_i > 0$, $|\chi| \leq \frac{|\lambda| + \alpha\varepsilon}{|\chi| + a}$, то $\lambda_i l_i - (\nu, \lambda) > 0$ ($i = 1, \dots, n$). Поскольку

$f \in W_{p, \chi, a}^l(G) \mapsto W_p^l(G) \mapsto W_{p-\varepsilon}^l(G)$ ($p - \varepsilon > 1$). Тогда для почти каждой точки $x \in G$ имеет место тождество, полученные О.В. Бесовым [1]

$$D^\nu f(x) = f_{T^\lambda}^{(\nu)}(x) + \int_0^T \int_{R^n} t^{-1-|\lambda|-(\nu,\lambda)+\lambda_i l_i} \times L_i^{(\nu)} \left(\frac{y}{t^\lambda}, \frac{\rho(t^\lambda, x)}{t^\lambda}, \rho'(t^\lambda, x) \right) D^\nu f(x+y) dy dt, \quad (18)$$

$$f_{T^\lambda}^{(\nu)}(x) = T^{-|\lambda|-(\nu,\lambda)} \int_{R^n} f(x+y) \Omega^{(\lambda)} \left(\frac{y}{T^\lambda}, \frac{\rho(T^\lambda, x)}{T^\lambda} \right) dy, \quad (19)$$

$0 < T \leq \min(1, T_0)$, функции $\Omega^\nu(\cdot, y), L_i^{(\nu)}(\cdot, y, z)$ являются функциями класса $C_0^\infty(R^n)$ а их носители содержатся в I_1 , носитель представления (18), (19) содержится в гибком роге $x + V(\lambda) \subset G$. На основании неравенства Минковского из (18), (19) имеем

$$\|D^\nu f\|_{q-\varepsilon, G} \leq \|f_{T^\lambda}^\nu\|_{q-\varepsilon, G} + \sum_{i=1}^n \|E_T^i\|_{q-\varepsilon, G}. \quad (20)$$

С помощью неравенства (15) при $U = G, t = T, f = \psi, \varphi = \Omega^{(\nu)}$, получим

$$\|f_{T^\lambda}^\nu\|_{q-\varepsilon, G} \leq C_1(\varepsilon) T^{\bar{\mu}_0} \|f\|_{p, \chi), a; G}, \quad (21)$$

а с помощью неравенства (7) при $U = G, D_i^{l_i} f = \psi, \varphi = L_i^{(\nu)}, \eta = T$ получим

$$\|E_T^i\|_{q-\varepsilon, G} \leq C_2(\varepsilon) T^{\bar{\mu}_i} \|D_i^{l_i} f\|_{p, \chi), a; G}. \quad (22)$$

С помощью неравенства (20)-(22) получаем неравенство (16).

Пусть теперь $\bar{\mu}_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ и покажем, что $D^\nu f$ непрерывна на G . Из равенства (18), (19) и неравенства (22) при $q = \infty, \bar{\mu}_i(q = \infty) = \bar{\mu}_{i,0} > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ имеем

$$\|D^\nu f - f_{T^\lambda}^\nu\|_{\infty, G} \leq \sum_{i=1}^n T^{\bar{\mu}_{i,0}} \|D_i^{l_i} f\|_{p, \chi), a; G}.$$

Отсюда следует, что при $T \rightarrow 0$ левая часть неравенства стремится к нулю. Так как $f_{T^\lambda}^\nu$ непрерывна на G , сходимость на $L_\infty(G)$ совпадает в данном случае с равномерной и, следовательно, предельная функция $D^\nu f$ непрерывна на G . Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при $\bar{\mu}_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ производная $D^\nu f$ удовлетворяет на G условию Гельдера в метрике $L_{q-\varepsilon}(G)$ с показателем σ , точнее

$$\|\Delta(\zeta, G) D^\nu f\|_{q-\varepsilon, G} \leq C(\varepsilon) \|f\|_{p, \chi), a; G} |\zeta|^\alpha, \quad (23)$$

где σ - любое число, удовлетворяющее неравенствам

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma \leq 1, & \text{ если } \frac{\bar{\mu}^0}{\lambda_0} > 1, \\ 0 \leq \sigma < 1, & \text{ если } \frac{\bar{\mu}^0}{\lambda_0} = 1, \\ 0 \leq \sigma < \frac{\bar{\mu}^0}{\lambda_0}, & \text{ если } \frac{\bar{\mu}^0}{\lambda_0} < 1, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\bar{\mu}^0 = \min \bar{\mu}_i (i=1, \dots, n); \lambda_0 = \max \lambda_j (j=1, \dots, n).$$

Если $\bar{\mu}_{i,0} > 0 (i=1, 2, \dots, n)$

$$\sup_{x \in G} |\Delta(\zeta, G) D^\nu f(x)| \leq C(\varepsilon) \|f\|_{W_{p, \chi), a; G}^l} |\zeta|^{\sigma_0}, \quad (25)$$

где σ_0 удовлетворяет тем же условиям, что σ , но с заменой $\bar{\mu}_i$ на $\bar{\mu}_{i,0}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О.В.Бесов, В.П. Ильин, С.М., Никольский Интегральные представления функций и теоремы вложения. М. Наука, 480 с., 1996
2. C. Capone, A. Fiorenza, On small Lebesgue spaces, Jour. Of Function spaces and Applications, v.3, No1, p.73-89, 2005
3. T.Iwaniec, C.Sbordone, On the inerrability of the Jacobian under minimal hypoterses. Arch. Ration. Mech. Anal., 119, 129-143, 1992
4. A.Eroglu, J.V Azizov., and V.S. Guliyev, Fractional maximal operator and its commutators in generalized Morrey spaces on Heisenberg group. Proc. of Inst. Math. and Mechanics NASAzerb. 44(2), 304-317, 2018
5. A.Fiorenza, C.E Karadzhov, Grand and small Lebesgue spaces and their analogs. J. Anal. Appl., v. (23) (4), p.657-681, 2004
6. V.M. Kokilashvili, The Reimann boundary value problem for analytic functions in the frame of grand $L^{(p)}$ spaces. Bull . Georgian Nat. Acad. Sci. Vol 4, No 1, p.5, 2010
7. V.M. Kokilashvili, A. Meskhi, Trace inequalities for fractional integrals in grand Lebesgue spaces. Studia Math., 210(2), p.159-176, 2012
8. A.Meskhi, Y.Sawano Density, Duality and preduality in grand variable exponent Lebesgue and Morrey spaces arxiv:17/0.02383 .v1 [math. FA] 06 Oct. 2017.
9. Y.Mizuta, T.Ohno, Trudingers exponential integrability for Reisz potentials of function in generalized grand Morrey spaces. J.Math. anal. Appl., 420(1), p.268-278, 2014
10. А.М. Наджафов, О некоторых свойствах функций из пространств типа Соболева-Морри, Сиб. Мат. Журнал, т.46, No3, стр. 634-648, 2005
11. A.M. Najafov, N.R. Rustamova Some differential properties of anisotropic grand Sobolev-Morrey spaces, Trans. of A. Razmadze Mathematical Institute, v.172, p.82-89, 2018
12. H.Rafeiro, A note on boundedness of operators in grand grand Morrey spaces. Advances in Harmonic analysis and operator theory, p.349-356, 2013 DOI: io.1007/978-3-0348-0516
13. C.Sbordone, Grand Sobolev spaces and their applications to variational problems, Le Matematiche, v.1, Fasc.11, p.335-347, 1996
14. S.M. Umarkhadziev, The boundedness of the Riesz potential operator from generalized grand Lebesgue spaces to generalized grand Morrey spaces. Operator theory: Advances and Applications, Basel, 2014, v.242, p.363-373.

УДК.517.95

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г.И. ЗАМАНОВ

Бакинский Инженерный Университет

Баку, АЗЕРБАЙДЖАН

e-mail.hasan.zamanli2018@yahoo.com.

РЕЗЮМЕ

В работе получены условия разрешимости одной краевой задачи периодического типа, когда граничные условия содержат линейный унитарный оператор. Все условия выражены коэффициентами краевых задач. Сперва определены некоторые пространства, соответствующие данной краевой задаче. И в этом пространстве оцениваются нормы операторов промежуточных производных. Коэффициенты этих оценок играют основную роль при получении условия разрешимости данной задачи.

Ключевые слова: гильбертово пространство, регулярное решение, периодическая задача, краевые условия.

İKİNCİ TƏRTİB OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ HAQQINDA XÜLASƏ

İşdə ikinci tərtib operator-diferensial tənliklər üçün sərhəd şərtində unitar operator olan periodik tip bir sərhəd məsələsinin həll olunması şərtləri tapılmışdır. Bütün bu şərtlər sərhəd məsələsinin əmsalları vasitəsilə ifadə olunur. Əvvəlcə sərhəd məsələsinə uyğun olan fəza qurulur. Bu fəzada aralıq törəmə operatorları qiymətləndirilir. Bu qiymətləndirmələrdə alınan əmsallar verilmiş məsələnin həll olunma şərtlərində əsas rol oynayır.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, requlyar həll, periodik məsələ, sərhəd şərtlər.

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM ON A FINITE INTERVAL FOR OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER

ABSTRACT

In this paper, solvability conditions for a single boundary-value problem of periodic type are obtained, when the boundary conditions contain a linear unitary operator. All conditions are expressed by coefficients of boundary value problems. First, some spaces corresponding to the given boundary value problem are defined. And in this space, the norms of operators of intermediate derivatives are estimated. The coefficients of these estimates play a major role in obtaining the solvability condition for this problem.

Key words: Hilbert space, regular solution, periodic problem, boundary conditions.

Пусть H сепарабельное гильбертово пространство, A - положительно определенный самосопряженный оператор в H , операторы $B_1 = A_1 A^{-1}, A_2 A^{-2}$ ограниченные в H . Рассмотрим краевую задачу

$$-\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + A^2 u(t) + A_1 u'(t) + A_2 u(t) = f(t), \quad (1)$$

$$u^{(k)}(0) = U u^{(k)}(1), \quad k = 0, 1, \quad (2)$$

где $f(t), u(t)$ вектор-функции со значениями в H , определенные в интервале $(0,1)$ почти всюду, оператор U унитарный в пространстве H .

Обозначим через $L_2((0,1); H)$ гильбертово пространство всех вектор-функций со значениями в H , причем

$$\|f\|_{L_2((0,1); H)} = \left(\int_0^1 \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Далее определим гильбертово пространство [1]

$$W_2^2((0,1); H) = \{u : u'' \in L_2((0,1); H), A^2 u \in L_2((0,1); H)\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^2((0,1); H)} = \left(\|u''\|_{L_2((0,1); H)}^2 + \|A^2 u\|_{L_2((0,1); H)}^2 \right)^{1/2}.$$

Определим следующее пространство

$$W_{2,U}^2((0,1); H) = \{u : u \in W_2^2((0,1); H), u^{(k)}(0) = Uu^{(k)}(1), k = 0, 1\}.$$

Обозначим через H_γ ($\gamma \geq 0$) шкалу гильбертовых пространств, т.е. $H_\gamma = D(A^\gamma)$ и $(x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$, при $\gamma = 0$ считаем, что $H_0 = H$. Из теоремы о следах [1] следует, что если $u \in W_2^2((0,1); H)$, то $u^{(k)}(0) \in H_{3-k-\frac{1}{2}}$, $u^{(k)}(1) \in H_{3-k-\frac{1}{2}}$, $k = 0, 1$. Далее, известно, что если $u \in W_2^2((0,1); H)$, то $A^{2-k} u^{(k)} \in L_2((0,1); H)$, $k = 0, 1$ и при $\varphi \in H_{\frac{3}{2}}$ $e^{-tA} \varphi \in W_2^2((0,1); H)$.

Аналогично определяются пространства $L_2(R; H)$ и $W_2^2(R; H)$, $R = (-\infty, \infty)$.

Определение. Если при любом $f(t) \in L_2((0,1); H)$ существует вектор-функция $u \in W_2^2((0,1); H)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в интервале $(0,1)$, граничные условия (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \|u^{(k)}(t) - Uu^{(k)}(1-t)\|_{2-k-\frac{1}{2}}, k = 0, 1$$

и имеет место оценки

$$\|u\|_{W_2^2((0,1); H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2((0,1); H)},$$

то задача (1),(2) называется регулярно-разрешимой.

В данной работе мы найдем условия на операторные коэффициенты краевой задачи (1),(2), которые обеспечивают регулярно разрешимость задачи (1),(2). Отметим, что такие задачи, когда $U = e^{i\alpha} E$, $\alpha \in R$ исследованы в работах [2,5].

Обозначим через

$$P_0 u = -u''(t) + A^2 u(t), \quad u \in W_{2,U}^2((0,1); H),$$

$$P_1 u = A_1 u'(t) + A_2 u(t), \quad u \in W_{2,U}^2((0,1); H).$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть A - положительно определенный самосопряженный оператор, U - унитарный оператор перестановочен с оператором U , т.е. перестановочен с его разложением единицы. Тогда оператор P_0 изоморфно отображает пространство $W_{2,U}^2((0,1);H)$ на $L_2(R_+;H)$.

Доказательство. Сперва докажем, что ядро оператора P_0 есть нулевое пространство. С этой целью рассмотрим следующее равенство для вектор-функций $u \in W_{2,U}^2((0,1);H)$:

$$\|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 = \|-u'' + A^2 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 = \|u''\|_{L_2((0,1);H)}^2 + \|A^2 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 - 2\operatorname{Re}(u'', A^2 u)_{L_2((0,1);H)}. \quad (3)$$

Так как при $u \in W_{2,U}^2((0,1);H)$

$$\begin{aligned} (u''(t), A^2 u(t))_{L_2((0,1);H)} &= \int_0^\infty (u''(t), A^2 u(t)) dt = \left(A^{\frac{1}{2}} u'(t), A^{\frac{3}{2}} u(t) \right) \Big|_0^1 - \\ &- \int_0^1 (Au', Au') dt = \left(A^{\frac{1}{2}} u'(1), A^{\frac{3}{2}} u(1) \right) - \left(A^{\frac{1}{2}} u'(0), A^{\frac{3}{2}} u(0) \right) - \|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2 = \\ &= \left(A^{\frac{1}{2}} u'(1), A^{\frac{3}{2}} u(1) \right) - \left(A^{\frac{1}{2}} Uu'(1), A^{\frac{3}{2}} Uu(1) \right) - \|A^2 u'\|_{L_2((0,1);H)}^2 = \\ &= \left(A^{\frac{1}{2}} u'(1), A^{\frac{3}{2}} u(1) \right) - \left(UA^{\frac{1}{2}} u'(1), UA^{\frac{3}{2}} Uu(1) \right) - \|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2 = \\ &= \left(A^{\frac{1}{2}} u'(1), A^{\frac{3}{2}} u(1) \right) - \left(A^{\frac{1}{2}} u'(1), A^{\frac{3}{2}} u(1) \right) - \|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2 = -\|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Следовательно, из (3) получаем, что при $u \in W_{2,U}^2((0,1);H)$ имеет неравенство

$$\|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 = \|u''\|_{L_2((0,1);H)}^2 + \|A^2 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 + 2\|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2. \quad (5)$$

Если $P_0 u = 0$, то отсюда следует, что $u = 0$, т.е. ядро оператора P_0 есть нулевое пространство.

Теперь покажем, что P_0 отображает пространство $W_{2,U}^2((0,1);H)$ на $L_2((0,1);H)$, т.е. уравнение $P_0 u = f$ имеет решение при всех $f \in L_2((0,1);H)$. Обозначим, через

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & t \in (0,1), \\ 0, & t \in R \setminus (0,1) \end{cases}$$

и его преобразование Фурье $\hat{f}_1(\xi)$. Рассмотрим уравнение

$$-u_1''(t) + A^2 u_1(t) = f_1(t), \quad t \in R = (-\infty, \infty).$$

После преобразования Фурье, имеем:

$$(\xi^2 E + A^2) \hat{u}(\xi) = \hat{f}_1(\xi), \quad \xi \in R,$$

тогда $u_1(\xi) = (\xi^2 E + A^2)^{-1} \hat{f}_1(\xi)$. Определим вектор-функцию

$$u_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 E + A^2)^{-1} \hat{f}_1(\xi) e^{i\xi t} d\xi.$$

Покажем, что $u_1(t) \in W_2^2(R; H)$. Действительно,

$$\|u_1''\|_{W_2^2(R; H)}^2 = \|A^2 u_1\|_{L_2(R; H)}^2 + \|u_1''\|_{L_2(R; H)}^2 = \|A^2 \hat{u}_1(\xi)\|_{L_2(R; H)}^2 + \|\xi^2 \hat{u}_1(\xi)\|_{L_2(R; H)}^2.$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \|A^2 \hat{u}_1(\xi)\|_{L_2(R; H)}^2 &= \|A^2 (\xi^2 E + A^2)^{-1} \hat{f}_1(\xi)\|_{L_2(R; H)}^2 \leq \sup_{\xi} \|A^2 (\xi^2 E + A^2)^{-1}\|^2 \|\hat{f}_1(\xi)\|_{L_2(R; H)}^2 \leq \\ &\leq \sup_{\xi \in R} \sup_{\mu \in \sigma(A)} \|\mu^2 (\xi^2 + \mu^2)^{-1}\|^2 \|f_1\|_{L_2(R; H)}^2 \leq \|f\|_{L_2((0,1); H)}^2. \end{aligned}$$

Аналогично имеем, что

$$\|u_1''\|_{L_2(R; H)}^2 \leq \|f\|_{L_2(R; H)}^2,$$

тогда $u_1 \in W_2^2(R; H)$ и $\|u_1\|_{W_2^2(R; H)} \leq \sqrt{2} \|f\|_{L_2(R; H)}$.

Обозначим, через

$$\omega(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in [0, 1], \\ 0, & R \setminus [0, 1]. \end{cases}$$

Очевидно, что $\omega(t) \in W_2^2((0,1); H)$, тогда $\omega^{(k)}(0) \in H_{3-k-\frac{1}{2}}$, $\omega^{(k)}(1) \in H_{3-k-\frac{1}{2}}$ ($k=0,1$).

Очевидно, что $\omega(t)$ удовлетворяет уравнению $-u''(t) + A^2 u(t) = 0$ почти всюду в интервале $(0,1)$. Тогда, чтобы решить уравнение $P_0 u = f$ ищем $u(t)$ в виде

$$u(t) = \omega(t) + e^{-tA} x_1 + e^{(t-1)A} x_2,$$

где $x_1, x_2 \in H_{\frac{3}{2}}$, пока неизвестные векторы. Из условия $u(t) \in W_{2,U}^2((0,1); H)$

$(u^{(k)}(0) = U u^{(k)}(1), k=0,1)$ получаем

$$\begin{cases} \omega(0) + x_1 + e^{-A} x_2 = U(\omega(1) + e^{-A} x_1 + x_2), \\ \omega'(0) - A x_1 + A e^{-A} x_2 = U(\omega'(1) - A e^{-A} x_1 + A x_2), \end{cases}$$

т.е.

$$(E - U e^{-A}) x_1 + (e^{-A} - U) x_2 = U \omega(1) - \omega(0),$$

$$(U e^{-A} - E) x_1 + (e^{-A} - U) x_2 = U A^{-1} \omega'(1) - A^{-1} \omega'(0).$$

Очевидно, что

$$\psi_1 = U \omega(1) - \omega(0) \in H_{\frac{3}{2}}, \psi_2 = U A^{-1} \omega'(1) - A^{-1} \omega'(0) \in H_{\frac{3}{2}}.$$

Так как

$$\|(E - U e^{-A})x\| \geq (1 - e^{-\mu_0})\|x\|, \|(e^{-A} - U)x\| \geq (1 - e^{-\mu_0})\|x\|,$$

где μ_0 есть нижняя граница спектра оператора A , то эти операторы обратимы в любом H_γ . Таким образом, мы можем найти векторы $y_1 = (E - U e^{-A})x_1$, $y_2 = (e^{-A} - U)x_2$,

следовательно X_1 и X_2 . Действительно,

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \psi_1 \\ -y_1 + y_2 = \psi_2 \end{cases}$$

т.е. $y_2 = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)$ и $x_2 = \frac{1}{2}(E^{-A} - U)^{-1}(\psi_1 + \psi_2) \in H_{\frac{3}{2}}$.

Аналогично

$$y_2 = \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2), \text{ т.е. } x_1 = \frac{1}{2}(E - Ue^{-A})(\psi_1 - \psi_2) \in H_{\frac{3}{2}}.$$

Следовательно, $u \in W_{2,U}^2((0,1); H)$.

Теперь докажем, что оператор $P \equiv P_0 + P_1$ также изоморфный оператор.

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1 и операторы $B_1 = A_1 A^{-1}$, $B_2 = A_2 A^{-2}$ такие, что

$$q = \frac{1}{2}(\|B_1\| + \|B_2\|) < 1.$$

Тогда оператор P изоморфно отображает пространство $W_{2,U}^2((0,1); H)$ на $L_2((0,1); H)$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$Pu = P_0 u + P_1 u = f, u \in W_{2,U}^2((0,1); H), f \in L_2(R_+; H).$$

После замены $P_0 u = v$ получаем уравнение

$$v + P_1 P_0^{-1} v = f$$

в пространстве $L_2((0,1); H)$. С другой стороны

$$\begin{aligned} \|P_1 P_0^{-1} v\|_{L_2((0,1); H)} &= \|P_1 u\|_{L_2((0,1); H)} = \|A_1 u' + A_2 u\|_{L_2((0,1); H)} \leq \\ &\leq \|B_1\| \cdot \|Au'\|_{L_2((0,1); H)} + \|B_2\| \cdot \|A^2 u\|_{L_2((0,1); H)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из равенства (5) следует, что

$$\|A^2 u\|_{L_2((0,1); H)} \leq \|P_0 u\|_{L_2((0,1); H)}. \quad (7)$$

С другой стороны при $u \in W_{2,U}^2((0,1); H)$

$$\|Au'\|_{L_2((0,1); H)}^2 = (Au', Au')_{L_2((0,1); H)} = -(A^2 u, u'')_{L_2((0,1); H)} \leq \frac{1}{2} \left(\|A^2 u\|_{L_2((0,1); H)}^2 + \|u''\|_{L_2((0,1); H)}^2 \right).$$

Тогда из равенства (5) следует, что

$$\|Au'\|_{L_2((0,1); H)}^2 \leq \frac{1}{2} \left(\|P_0 u\|_{L_2((0,1); H)}^2 - 2\|Au'\|_{L_2((0,1); H)}^2 \right)$$

т.е.

$$2\|Au'\|_{L_2((0,1); H)}^2 \leq \frac{1}{2}\|P_0 u\|_{L_2((0,1); H)}^2,$$

или

$$\|Au'\|_{L_2((0,1);H)} \leq \frac{1}{2} \|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)}. \quad (8)$$

Учитывая неравенства (7) и (8) в неравенстве (6), получаем, что при любом $v \in L_2((0,1);H)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|P_1 P_0^{-1} v\|_{L_2((0,1);H)} &\leq \frac{1}{2} \|B_1\| \cdot \|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)} + \|B_2\| \cdot \|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)} = \\ &= \frac{1}{2} (\|B_1\| + \|B_2\|) \|v\|_{L_2((0,1);H)} = q \|v\|_{L_2((0,1);H)}. \end{aligned}$$

Так как $q < 1$, то $v = (E + P_1 P_0^{-1})^{-1} f$, а $u = P_0^{-1} (E + P_1 P_0^{-1} f)$. Отсюда имеем, что

$$\|u\|_{W_2^2((0,1);H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2((0,1);H)}.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы получаем

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда задача (1),(2) регулярно разрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
2. Заманов Г.И. Об одной краевой задаче периодического типа для операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка // Известие Педагогического Университета, раз. Естественных наук, 2016, т.64, №2.
3. Карааслан М.Д. Об одной периодической краевой задаче для дифференциальных уравнений второго порядка с операторными коэффициентами / Тезисы меж. конференции, посв. 90-летию со дня рождения Гейдара Алиева, 2013, Баку, с.158.
4. Мамедова Ш.Дж. Краевые задачи для эволюционного уравнения на конечном отрезке // Известие АН. ССР, сер. физ.-тех.мат. наук, 1974, №6, с.63-66.
5. Heydarova S.B. On a periodic type boundary value problem for a third order equation in Hilbert space // Transactions of NAS of Azerbaijan, ser. of Physic. tech an Mathematic Sciences, 2015, v.35, №1, p.42-46.

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

1. "The Baku Engineering University Mathematics and Computer Science" accepts original unpublished articles and reviews in the research field of the author.
2. Articles are accepted in English.
3. File format should be compatible with **Microsoft Word** and must be sent to the electronic mail (journal@beu.edu.az) of the Journal. The submitted article should follow the following format:
 - Article title, author's name and surname
 - The name of workplace
 - Mail address
 - Abstract and key words
4. The title of the article should be in each of the three languages of the abstract and should be centred on the page and in bold capitals before each summary.
5. **The abstract** should be written in **9 point** type size, between **100** and **150** words. The abstract should be written in the language of the text and in two more languages given above. The abstracts of the article written in each of the three languages should correspond to one another. The keywords should be written in two more languages besides the language of the article and should be at least three words.
6. **.UDC** and **PACS** index should be used in the article.
7. The article must consist of the followings:
 - Introduction
 - Research method and research
 - Discussion of research method and its results
 - In case the reference is in Russian it must be given in the Latin alphabet with the original language shown in brackets.
8. **Figures, pictures, graphics and tables** must be of publishing quality and inside the text. Figures, pictures and graphics should be captioned underneath, tables should be captioned above.
9. **References** should be given in square brackets in the text and listed according to the order inside the text at the end of the article. In order to cite the same reference twice or more, the appropriate pages should be given while keeping the numerical order. For example: [7, p.15].

Information about each of the given references should be full, clear and accurate. The bibliographic description of the reference should be cited according to its type (monograph, textbook, scientific research paper and etc.) While citing to scientific research articles, materials of symposiums, conferences and other popular scientific events, the name of the article, lecture or paper should be given.

Samples:

- a) **Article:** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjaye N.M.. *Spatial and electronic structure of monomer and dimeric conapeetes of carnosine with zinc*, Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010
 - b) **Book:** Christie John Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002
 - c) **Conference paper:** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. *Application of Information – Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions"*, Baki, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391
- References should be in 9-point type size.
10. The margins sizes of the page: - Top 2.8 cm. bottom 2.8 cm. left 2.5 cm, right 2.5 cm. The article main text should be written in Palatino Linotype 11 point type size single-spaced. Paragraph spacing should be 6 point.
 11. The maximum number of pages for an article should not exceed 15 pages
 12. The decision to publish a given article is made through the following procedures:
 - The article is sent to at least to experts.
 - The article is sent back to the author to make amendments upon the recommendations of referees.
 - After author makes amendments upon the recommendations of referees the article can be sent for the publication by the Editorial Board of the journal.

YAZI VƏ NƏŞR QAYDALARI

1. "Journal of Baku Engineering University- Riyaziyyat və kompüter elmləri" - əvvəllər nəşr olunmamış orijinal əsərləri və müəllifin tədqiqat sahəsi üzrə yazılmış icmal məqalələri qəbul edir.
2. Məqalələr İngilis dilində qəbul edilir.
3. Yazılar **Microsoft Word** yazı proqramında, (**journal@beu.edu.az**) ünvanına göndərməlidir. Göndərilən məqalələrdə aşağıdakılara nəzərə alınmalıdır:
 - Məqalənin başlığı, müəllifin adı, soyadı,
 - İş yeri,
 - Elektron ünvanı,
 - Xülasə və açar sözlər.
4. **Məqalədə başlıq hər xülasədən əvvəl** ortada, qara və böyük hərflə xülasələrin yazıldığı hər üç dildə olmalıdır.
5. **Xülasə** 100-150 söz aralığında olmaqla, 9 punto yazı tipi böyüklüyündə, məqalənin yazıldığı dildə və bundan əlavə yuxarıda göstərilən iki dildə olmalıdır. Məqalənin hər üç dildə yazılmış xülasəsi bir-birinin eyni olmalıdır. Açar sözlər uyğun xülasələrin sonunda onun yazıldığı dildə verilməklə ən azı üç sözdən ibarət olmalıdır.
6. Məqalədə UOT və PACS kodları göstərməlidir.
7. Məqalə aşağıdakılardan ibarət olmalıdır:
 - Giriş,
 - Tədqiqat metodu
 - Tədqiqat işinin müzakirəsi və onun nəticələri,
 - İstinad ədəbiyyatı rus dilində olduğu halda orijinal dili mötərzə içərisində göstərməklə yalnız Latın əlifbası ilə verilməlidir.
8. **Şəkil, rəsm, grafik və cədvəllər** çapda düzgün, aydın çıxacaq vəziyyətdə və mətn içərisində olmalıdır. Şəkil, rəsm və grafiklərin yazıları onların altında yazılmalıdır. Cədvəllərdə başlıq cədvəlin üstündə yazılmalıdır.
9. **Mənbələr** mətn içərisində kvadrat mötərizə daxilində göstərilməklə məqalənin sonunda mətn daxilindəki sıra ilə düzülməlidir. Eyni mənbəyə iki və daha çox istinad edildikdə əvvəlki sıra sayı saxlanmaqla müvafiq səhifələr göstərməlidir. Məsələn: [7,səh.15].

Ədəbiyyat siyahısında verilən hər bir istinad haqqında məlumat tam və dəqiq olmalıdır. İstinad olunan mənbənin biblioqrafik təsviri onun növündən (monoqrafiya, dərslik, elmi məqalə və s.) asılı olaraq verilməlidir. Elmi məqalələrə, simpozium, konfrans, və digər nüfuzlu elmi tədbirlərin materiallarına və ya tezislərinə istinad edərkən məqalənin, məruzənin və ya tezisnin adı göstərməlidir.

Nümunələr:

- a) **Məqalə:** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure of monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc*, Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010
- b) **Kitab:** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, 2002
- c) **Konfrans:** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Baki, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391

Mənbələr 9 punto yazı tipi böyüklüyündə olmalıdır.

10. **Səhifə ölçüləri:** üstədən 2.8 sm, altından 2.8 sm, soldan 2.5 sm və sağdan 2.5 sm olmalıdır. Mətn 11 punto yazı tipi böyüklüyündə, **Palatino Linotype** yazı tipi ilə və tək simvol aralığında yazılmalıdır. Paraqraflar arasında 6 punto yazı tipi aralığında məsafə olmalıdır.
11. Orijinal tədqiqat əsərlərinin tam mətni bir qayda olaraq 15 səhifədən artıq olmamalıdır.
12. Məqalənin nəşrə təqdimi aşağıdakı qaydada aparılır:
 - Hər məqalə ən azı iki ekspertə göndərilir.
 - Ekspertlərin tövsiyələrini nəzərə almaq üçün məqalə müəllifə göndərilir.
 - Məqalə, ekspertlərin tənqidi qeydləri müəllif tərəfindən nəzərə alındıqdan sonra Jurnalın Redaksiya Heyəti tərəfindən çapa təqdim oluna bilər.

YAZIM KURALLARI

1. “Journal of Baku Engineering University- Matematik ve Bilgisayar Bilimleri” önceler yayımlanmamış orijinal çalışmaları ve yazarın kendi araştırma alanın-da yazılmış derleme makaleleri kabul etmektedir.
2. Makaleler İngilizce kabul edilir.
3. Makaleler Microsoft Word yazı programında, (**journal@beu.edu.az**) adresine gönderilmelidir. Gönderilen makalelerde şunlar dikkate alınmalıdır:
 - Makalenin başlığı, yazarın adı, soyadı,
 - İş yeri,
 - E-posta adresi,
 - Özet ve anahtar kelimeler.
4. **Özet** 100-150 kelime arasında olup 9 font büyüklüğünde, makalenin yazıldığı dilde ve yukarıda belirtilen iki dilde olmalıdır. Makalenin her üç dilde yazılmış özeti birbirinin aynı olmalıdır. Anahtar kelimeler uygun özeti sonunda onun yazıldığı dilde verilmekle en az üç sözcükten oluşmalıdır.
5. Makalede UOT ve PACS tipli kodlar gösterilmelidir.
6. Makale şunlardan oluşmalıdır:
 - Giriş,
 - Araştırma yöntemi
 - Araştırma
 - Tartışma ve sonuçlar,
 - İstinat Edebiyatı Rusça olduğu halde orijinal dili parantez içerisinde göstermekle yalnız Latin alfabesi ile verilmelidir.
7. **Şekil, Resim, Grafik ve Tablolar** baskıda düzgün çıkacak nitelikte ve metin içerisinde olmalıdır. Şekil, Resim ve grafiklerin yazıları onların alt kısmında yer almalıdır. Tablolarda ise başlık, tablonun üst kısmında bulunmalıdır.
8. **Kullanılan kaynaklar**, metin dâhilinde köşeli parantez içerisinde numaralandırılmalı, aynı sırayla metin sonunda gösterilmelidir. Aynı kaynaklara tekrar başvurulduğunda sıra muhafaza edilmelidir. Örneğin: [7,seh.15]. Referans verilen her bir kaynağın künyesi tam ve kesin olmalıdır. Referans gösterilen kaynağın türü de eserin türüne (monografi, derslik, ilmi makale vs.) uygun olarak verilmelidir. İlmî makalelere, sempozyum, ve konferanslara müracaat ederken makalenin, bildirinin veya bildiri özetlerinin adı da gösterilmelidir.

Örnekler:

- a) **Makale:** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and Electronic Structure of Monomeric and Dimeric Conapeetes of Carnosine Üith Zinc*, Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010
- b) **Kitap:** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002
- c) **Kongre:** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. “*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions*”, Baki, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391

Kaynakların büyüklüğü 9 punto olmalıdır.

9. **Sayfa ölçüleri**; üst: 2.8 cm, alt: 2.8 cm, sol: 2.5 cm, sağ: 2.5 cm şeklinde olmalıdır. Metin 11 punto büyüklükte **Palatino Linotype** fontu ile ve tek aralıkta yazılmalıdır. Paragraflar arasında 6 puntoluk yazı mesafesinde olmalıdır.
10. Orijinal araştırma eserlerinin tam metni 15 sayfadan fazla olmamalıdır.
11. Makaleler dergi editör kurulunun kararı ile yayımlanır. Editörler makaleyi düzeltme için yazara geri gönderebilir.
12. Makalenin yayına sunuşu aşağıdaki şekilde yapılır:
 - Her makale en az iki uzmana gönderilir.
 - Uzmanların tavsiyelerini dikkate almak için makale yazara gönderilir.
 - Makale, uzmanların eleştirel notları yazar tarafından dikkate alındıktan sonra Derginin Yayın Kurulu tarafından yayına sunulabilir.
13. Azerbaycan dışından gönderilen ve yayımlanacak olan makaleler için,(derginin kendilerine gönderilmesi zamanı posta karşılığı) 30 ABD Doları veya karşılığı TL, T.C. Ziraat Bankası/Üsküdar-İstanbul 0403 0050 5917 No’lu hesaba yatırılmalı ve makbuzu üniversitemize faksılmalıdır.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. «Journal of Baku Engineering University» - Математики и информатики публикует оригинальные, научные статьи из области исследования автора и ранее не опубликованные.
2. Статьи принимаются на английском языке.
3. Рукописи должны быть набраны согласно программы **Microsoft Word** и отправлены на электронный адрес (**journal@beu.edu.az**). Отправляемые статьи должны учитывать следующие правила:
 - Название статьи, имя и фамилия авторов
 - Место работы
 - Электронный адрес
 - Аннотация и ключевые слова
4. **Заглавие статьи** пишется для каждой аннотации заглавными буквами, жирными буквами и располагается по центру. Заглавие и аннотации должны быть представлены на трех языках.
5. **Аннотация**, написанная на языке представленной статьи, должна содержать 100-150 слов, набранных шрифтом 9 punto. Кроме того, представляются аннотации на двух других выше указанных языках, перевод которых соответствует содержанию оригинала. Ключевые слова должны быть представлены после каждой аннотации на его языке и содержать не менее 3-х слов.
6. В статье должны быть указаны коды UOT и PACS.
7. Представленные статьи должны содержать:
 - Введение
 - Метод исследования
 - Обсуждение результатов исследования и выводов.
 - Если ссылаются на работу на русском языке, тогда оригинальный язык указывается в скобках, а ссылка дается только на латинском алфавите.
8. **Рисунки, картинки, графики и таблицы** должны быть четко выполнены и размещены внутри статьи. Подписи к рисункам размещаются под рисунком, картинкой или графиком. Название таблицы пишется над таблицей.
9. **Ссылки** на источники даются в тексте цифрой в квадратных скобках и располагаются в конце статьи в порядке цитирования в тексте. Если на один и тот же источник ссылаются два и более раз, необходимо указать соответствующую страницу, сохраняя порядковый номер цитирования. Например: [7, стр.15]. Библиографическое описание ссылаемой литературы должно быть проведено с учетом типа источника (монография, учебник, научная статья и др.). При ссылке на научную статью, материалы симпозиума, конференции или других значимых научных мероприятий должны быть указаны название статьи, доклада или тезиса.

Например:

- a) **Статья:** Demukhamedova S.D., Aliyeva I.N., Godjayev N.M. *Spatial and electronic structure of monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc*, Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010
- b) **Книга:** Christie on Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, 2002
- c) **Конференция:** Sadychov F.S, Fydin C,Ahmedov A.I. Appligation of Information-Communication Nechnologies in Science and education. II International Conference. *"Higher Twist Effects In Photon-Proton Collision"*, Baki,01-03 Noyabr, 2007, ss.384-391

Список цитированной литературы набирается шрифтом 9 punto.

10. **Размеры страницы:** сверху 2.8 см, снизу 2.8 см, слева 2.5 и справа 2.5. Текст печатается шрифтом **Palatino Linotype**, размер шрифта 11 punto, интервал-одинарный. Параграфы должны быть разделены расстоянием, соответствующим интервалу 6 punto.
11. Полный объем оригинальной статьи, как правило, не должен превышать 15 страниц.
12. Представление статьи к печати производится в ниже указанном порядке:
 - Каждая статья посылается не менее двум экспертам.
 - Статья посылается автору для учета замечаний экспертов.
 - Статья, после того, как автор учел замечания экспертов, редакционной коллегией журнала может быть рекомендована к печати.