ISSN 2521-635X

BMU
BAKI MÜHƏNDİSLİK UNİVERSİTETİ

Journal of Baku Engineering University

Volume 1
Number 2
2017

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Journal is published twice a year
Number-1. June, Number-2. December

An International Journal

http://journal.beu.edu.az

Founder

Havar Mammadov

Editor-in-chief

Niftali Qocayev

Co-Editors

Hamzaga Orucov

Agasi Melikov

Editorial advisory board

Alekber Aliyev (Azerbaijan, Baku State University)
Abzeddin Adamov (Azerbaijan, ADA)
Gorbachuk Valentina Ivanovna (Ukraina, Academy of Science)
Hamdulla Aslanov (Azerbaijan, Akademy of Science)
Khalil Ismailov (Azerbaijan, BANM)
Nadir Agayev (Azerbaijan, Aviasiya University)
Rakib Efendiyev (Azerbaijan,Baku State University)
Sosnin Petr Ivanovich(Russia,Ulyanovsk State Technical University)
Vaqif Quliyev (Azerbaijan, Akademy of Science)

International Advisory board

Abdeljalil Nachaoui (France, Nantes University)
Che Soong Kim (Koreya, Sangji University)
Chakib Abdelkrim, (Morocco, BeniMellal University)
FeodorRofe-Beketov, (Ukraine, Kharkov)
Garib Murshudov (York Academy,UK, London)
Gorbachuk Miroslav Lvovich (Ukraina ,Academy of Science)
Gorbarchuk Vladimir Ivanovich (Poland, Lyubel Polytechnic University)
Golovko Vladimir Adamovich (Belarus, Brest State Universiteti)
Hamed Sari-Sarraf (USA,TexasTechnik University)
Hari Srivastava (Canada,Victoria,)
Jauberteau Francois (France,Nantes University)
Krivonos Yuriy Georgievich(Ukraine, Academy of Science)
Mourad Nachaoui,(France,Nantes University)
Nadir Alisov (Ukraine, Academy of Science)
Rasim Alikuliyev (Azerbaijan, National Academy of Science)
Ramiz Alikuliyev (Azerbaijan, National Academy of Science)
Tarasenko Vladimir Petrovich (National Technical University of Ukraine)
Telman Aliyev (Azerbaijan, National Academy of Science)
Vedat Coşkun (Turkiye,Işık University)
Vladimir B. Vasilyev,(Russia, Lipetsk State Technical University)

Executive Editors

Shafag Alizade

Assistant Editors

Svetlana Denmuhammedovna

Design

Ilham Aliyev

Contact address

Journal of Baku Engineering University
AZ0102, Khirdalan city, Hasan Aliyev str. 120, Absheron, Baku, Azerbaijan
Tel: 00 994 12 - 349 99 95 Fax: 00 994 12 349-99-90/91

e-mail: *journal@beu.edu.az*
web: *http://journal.qu.edu.az*
facebook: *Journal Of Baku Engineering University*

Copyright © Baku Engineering University

ISSN 2521-635X

ISSN 2521-635X

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Baku - AZERBAIJAN

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

2017. Volume 1, Number 2

CONTENTS

ŞƏBƏKƏLƏRDƏ ADMİNİSTRATİV İDARƏ OLUNMANIN VƏ PROTOKOLLARININ ANALİZİ İLƏ İERARXİK ARXİTEKTURUNUN İŞLƏNMƏSİ

Balıyev E.A, Əbilov K.Ə., İsmayılov M.A. ____ *91*

CERT KOMANDALARINDA İNSİDENT BİLETİNİN EMAL OLUNMAMIŞ YÜKÜNÜN PROQNOZLAŞDIRILMASI

Elşən Bağırov ____ *101*

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ГУРСА-ДАРБУ

К.Б. Мансимов, В.А. Сулейманова ____ *107*

О СПЕКТРЕ И РЕЗОЛЬВЕНТЕ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

Н.А. Гадирли ____ *118*

VEB SERVERLƏRDƏ NÖVBƏLİLİK MODELLƏRİNİN VƏ ARTIQ YÜKLƏNMƏ PROBLEMİNİN HƏLLİ YOLLARININTƏHLİLİ

Cavid Misirli, Babək Abbasov ____ *126*

NONLINEAR ELLIPTIC CONVOLUTION DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATIONS

Hummet K. Musaev ____ *140*

BİHARMONİK TƏNLİYİN HƏLLİNİN ÇEBIŞEV-LAQER ÇOXHƏDLİLƏRİ İLƏ YAXINLAŞDIRILMASI

Şahbazova Q.L. ____ *149*

UOT : 002.6

ŞƏBƏKƏLƏRDƏ ADMİNİSTRATİV İDARƏ OLUNMANIN VƏ PROTOKOLLARININ ANALİZİ İLƏ İERARXİK ARXİTEKTURUNUN İŞLƏNMƏSİ

BALIYEV E.A, ƏBİLOV K.Ə., İSMAYILOV M.A.

Azərbaycan Texniki Universiteti,

Bakı Mühəndislik Universiteti

Bakı / AZƏRBAYCAN

ebaliyev@list.ru, kamran_a72@mail.ru

XÜLASƏ

Təqdim olunan məqalə şəbəkələrdə adminstrativ idarə olunmanın və protokollarının analizi ilə ierarxik arxitekturunun işlənməsinə həsr olunmuşdur. Tədqiqat prosesində administrativ xidmət olunmanın əsas funksiyaları, idarəetmə məsələlərinin çox səviyyəli təşkili, şəbəkənin administrativ idarə olunma modeli, şəbəkənin idarə olunma vasitələri və protokolları, şəbəkənin administrativ idarə olunmasının ierarxik arxitekturunun işlənməsinə baxılmışdır. Beləliklə, şəbəkələrdə administrativ idarə olunmanın tətbiqinin vacibliyi və nöqsanlar göstərilmişdir.

Açar sözlər: şəbəkə elementləri, administrativ idarə olunma, şəbəkənin ierarxiyası, idarə olunma modeli, xidmət olunma, model, protokol.

РАЗРАБОТКА ИЕРАРХИЧЕСКОЙ АРХИТЕКТУРЫ СЕТЕЙ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА АДМИНИСТРАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ИХ ПРОТОКОЛОВ

РЕЗЮМЕ

Представленная статья посвящена разработке иерархической архитектуры на основе анализа протоколов и административному управлению в сетях. В процессе исследования анализированы основные вопросы функции административного обслуживания, организаций многоуровневых задач управления, моделью, административного управления сетей, протоколы и средства управления сетью. Разработаны иерархические архитектуры административного управления сетей.

Таким образом, показаны недостатки и важность применения административного управления в сетях.

Ключевые слова: элементы сетей, административное управление, иерархия сетей, модель управления, обслуживание, модель, протокол.

DEVELOPMENT OF A HIERARCHICAL NETWORK ARCHITECTURE BASED ON THE ANALYSIS OF ADMINISTRATIVE MANAGEMENT AND THEIR PROTOCOLS

ABSTRACT

The article is devoted to the development of a hierarchical architecture based on protocol analysis and administrative management in networks. During the research, the main issues of the function of administrative services, organizations of multi-level management tasks, a model, administrative management of networks, protocols and network management tools were analyzed. The hierarchical architectures of administrative management of networks are developed.

Thus, the shortcomings and importance of administrative management in networks are shown.

Keywords: network elements, administrative management, network hierarchy, management model, service, model, protocol.

Giriş

Müasir informasiya texnologiyalarının əsas inkişaf istiqamətlərindən biri də şəbəkə kompüter texnologiyalarıdır. Bu da mürəkkəb kompüter şəbəkəsi hesab olunduğundan əlavə olaraq idarə olunmanın xüsusi vasitələri tələb olunur. Şəbəkə kompüter texnologiyalarının daha

perspektivli alt sistemi kimi administrativ idarə olunmanı göstərmək olar. Bu da çox saylı müxtəlif növlü kommunikasiya avadanlının olması ilə əlaqələndirilir və bununla da şəbəkənin özünün əsas funksiyalarını yerinə yetirmək üçün müəyyən çətinliklər yaranır. Məsələn, böyük korporativ şəbəkələr paylanmış xarakterə malik olduğundan hər bir konsentratora, kommutatora, multipleksora və marşrutizatora dair informasiyanı avtomatik rejimdə yığan, şəbəkə operatoruna təqdim edən mərkəzləşdirilmiş idarəetmə sistemi olmadan onun işlərinin dəstəklənməsi mümkün olmur. Adətən idarəetmə sistemləri şəbəkənin idarə olunma sistemlərinə dair olduqca sadə əməliyyatları avtomatik rejimdə yerinə yetirir, ancaq mürəkkəb həll olunmaları hazırlanmış informasiya sistemi əsasında qərar qəbul edilməsi üçün adamlara təqdim edir. İdarəetmə sistemi inteqrallaşdırılmış olmalıdır. Bu onu göstərir ki, həmcins olmayan qurğuların idarə olunma funksiyaları ümumi məqsədlərə xidmət etməlidir.

İdarəetmə sistemləri özü aparat–proqram kompleksi olduğundan idarəetmə sisteminin tətbiqinin məqsədyönlü sərhəddi mövcuddur və şəbəkənin mürəkkəbliyindən, tətbiq olunan kommunikasiya avadanlığının müxtəlifliyindən və onların sahələrdə paylanması dərəcəsindədə asılıdır.

Şəbəkənin paylanması təbiəti idarəetmə sisteminin yardılması üçün "menecer–müvəkkil" modelinin tətbiqinə gətirib çıxartdı. Müvəkkildən informasiyanı yığan menecer aparat–proqram vasitəsi olmaqla, şəbəkənin administratoru onun təqdimi üçün emal olunmanı yerinə yetirir. Bu informasiya əsasında administrator menecerin köməyi ilə şəbəkə obyektlərinə idarəedici təsirlər göstərə bilər. İstər–istəməz idarə olunma avtomatlaşdırılmalıdır. Müvəkkillər şəbəkənin idarə olunma elementlərinə malik olurlar. Onlar bilavasitə idarə olunma obyektləri ilə qarşılıqlı əlaqəlidirlər və idarə olunan parametrlərin verilənlər bazasına xidmət edirlər. İdarə olunmanın informasiyan bazası (İİB) idarə olunan parametrlərin siyahısından və onların qiymətlərindən ibarət olur, müvəkkilər isə verilənlər bazası ilə obyektlərin real vəziyyətlərinin uyğun gəlmələrinə cavab verir.

Şəbəkənin idarə olunmasının geniş əhatəli sistem idarə olunmanı bütün obyektlərin (son qovşaqlar, əlaqə xəttləri, kommunikasiya aparaturaları) vəziyyətlərinə olan tam informasiyanı, şəbəkə strukturuna dair əlaqəlilik informasiyanı administratora təqdim etməlidir.

Əlaqə qovşaqlarının köməyi ilə hesablama şəbəkələrində administrativ xidmət olunmanın əsas funksiyaları

Hesablama şəbəkələrinin idarə olunması vacib sahələrindən biri hesab olunur. Həmin məqsədlə hesablama şəbəkələrində xüsusi administrativ idarə olunma xidmətləri yaradılır və özünün fəaliyyət mövqeinə görə şəbəkənin tətbiqi səviyyəsinə aid olunmaqla xüsusi sistemli proseslər yığımı kimi realizə olunur. Administrativ idarə olunma funksiyaları onun ayrı–ayrı tərkib hissələri paylanılan şəbəkə operatorları ilə realizə olunur. İdarə olunma qərarlarının qəbul edilməsi və şəbəkənin fəaliyyət proseslərinin nəzarəti üçün operatorların işi EHM–lərlə və terminal avadanlıqlarla daim dəstəklənir.

Administrativ idarə olunma xidmətlərinin əsas funksiyaları operatorlara xidmət olunma, konfiqurasiyanın idarə olunması, texnikixidmət olunmanın təşkili, fəaliyyət rejiminin idarə olunması, resurslardan istifadə olunmanını hesablanması, statiskanın dövrü yığılması, təhlükəsizliyin idarə olunması və s.

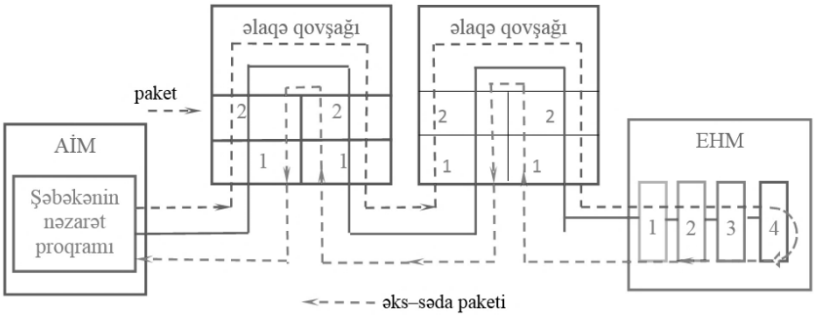
Şəbəkə operatorlarına xidmət olunma administrativ idarə olunma vasitələrinə müraciət olunmanın təmini kimi başa düşülür. Məlum olduğu kimi vasitələrdən hər biri administrativ idarə

olunma mərkəzləri EHM–lərində yerləşdirilmiş uyğun proqramlarla realizə olunur. Xüsusi əmrlərin köməyi ilə operatorlar aşağıdakı əməliyyatları yerinə yetirir: şəbəkənin qoşulması və aralanması, şəbəkənin kompanentlərinin və ümumi sistemin qoşulması və aralanması, şəbəkənin və özünün kompanentlərinin diaqnostikası və işləmə qabiliyyətinin nəzarət olunması və şəbəkənin fəaliyyətinə dair statistikanın yığılması. Bütün bunlar üçün proseslər arası verilənlərin ötürülməsi və birləşmələrin quraşdırılmasının standart vasitələrindən istifadə olunur.

Şəbəkənin konfiqurasiyasının idarə olunması əlaqə kanalları və əlaqə qovşaqlarının və eləcə də işçi stansiyaların qoşulması və aralanması kimi izah olunur. Bu kompüterlər şəbəkəyə başlanğıc yüklənmə proqramlarından ibarət olan vasitələrin köməyi ilə qoşulur.

Texniki xidmət olunmanın və təşkili şəbəkənin nasazlığı,komponentlərin işləmə qabiliyyətini və şəbəkənin mövcud vəziyyətini nəzarətdə saxlayır, şəbəkə operatorları şəbəkə komponentlərinin aktivliyini yoxlama imkanına malik olur, imtinaların sayına dair istismar olunma statistikasını ala bilir. Testlənmə üsulun və nasazlığın axtarılması şəbəkə funksiyalarını realizə edən vasitələrin tipindən asılıdır. Testləmə elementindən sistemə-paketlər mənbəinə qaytarılan, xüsusi paketlərin ötürülməsinə əsaslanan əks–səda–nəzarəti üsulu daha geniş yayılmışdır (Şəkil 1).

Şəkil 1. Kanalların və sistemlərin əks–səda nəzarəti



Administrativ idarə olunma mərkəzində (AİM) yerləşdirilmiş şəbəkənin nəzarət proqramı şəbəkənin tələb olunan elementlərinə ünvanlaşmış (kanalların son avadanlığı) nəzarət paketlərinin göndərilməsi yolu ilə şəbəkə elementlərinin–OSİ etalon modelinin (birinci- dördüncü səviyyələrində) işləmə qabiliyyətini yoxlayır. Nəzarət paketlərinə cavab olaraq elementlər əks–səda paketlərini formaya salır ki, administrativ idarə olunma mərkəzi bu məlumatı alan kimi nəzarət olunan elementin traktının işləmə qabiliyyətinin olmasından xəbər verir. Nəzarət prosesində alınan informasiya imtina edən elementin diaqnostikasına imkan yaranır. Bu üsulla EHM–lə verilənlərin ötürmə şəbəkəsi (VÖŞ) əlaqələndirən verilənlərin ötürmə kanallarının nəzarəti üçün baş EHM–lərdən istifadə olunur[1,6].

Şəbəkə fəaliyyətinin idarə olunması şəbəkənin cari konfiqurasiyasına uyğun gələn parametr--lərin seçilməsi hesabına şəbəkənin işlənməsinin optimallaşdırılmasına istiqamətləndirilir. Şəbəkənin cari vəziyyətindən asılı olaraq operatorlar kanalların, əlaqə qovşaqlarında marşrutlaşma cədvəlinin işləmə rejimlərini, şəbəkə EHM–ləri üçün paketlərin ötürülməsinə olan icazələrin sayını və s. Təyin edən parametrləri müəyyənləşdirir. Optimallaşdırma baş EHM–lər arasında verilənlər faylının və proqramların təkrar yerləşdirilməsi hesabına əldə edilir.

Şəbəkə resurslarının istifadəsinin hesaba alınması üçün baş EHM–lər, əlaqə qovşaqları və terminal EHM–lər proqramı monitorları (transirovka tipli proqram monitoru, sazlanmış proqram monitoru, seçimli tipli proqram monitoru, avtonom proqram monitoru) ölçü sistemləri ilə təc-

hiz olunnurlar. Monitorlar şəbəkə ilə hər bir qarşılıqlı əlaqə seansında istifadəçiyə təqdim olunan yaddaşın tutumunu prosessor vaxtı, əlaqələndirici xidmətlərin həcmi və növünü qeyd edir. Əldə edilən verilənlər əsasında şəbəkənin inkişafına dair məsələlər həllini tapır: terminalların və istifadəçilərin sayının, EHM–lərin və istifadəçilərin sayının artması və s.

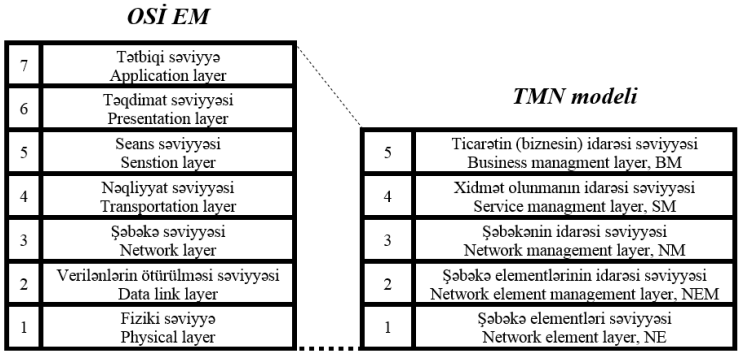
Beləliklə, AİM–in öz aralarında və şəbəkənin başqa sistemləri isə qarşılıqlı əlaqə üçün və ümumi şəbəkə üçün protokollardan istifadə olunur.

İdarəetmə məsələlərinin çox səviyyəli təşkilinin təyini

Yuxarıda qeyd olunduğu kimi idarəetmə məsələlərinin bir neçə funksional qrupa bölünməsindən (şəbəkənin konfiqurasiyasının adlandırılması, məhsuldarlığın və etibarlılığın analizi, təhlükəsizliyin idarə olunması, resursların idarəi, imtinaların emalı) başqa, şəbəkənin ierarxik təşkilinə uyğun olaraq idarəetmə məsələlərini səviyyələrə görə bölmək daha faydalı hesab olunur (şəbəkənin konfiqurasiyasının adlandırılması, məhsuldarlığın və etibarlılığın analizi, təhlükəsizliyin idarə olunması, resursların idarəi, imtinaların emalı). Məsələn, korperativ şəbəkələr müəssisənin ierarxik xarakterinə və məsələlərini əks etdirməklə ierarxik prinsipdə quraşdırılır. Açağı fiziki səviyyədə və i.a. kimi parametrlər təyin olunur. Bu səviyyənin elementləri ayrı–ayrı kompüterlər, kommutatorlar, konsentratorlar, şəbəkə marşurizatorlar, verilənlərin idarə kanallarıdır. İerarxiyasının növbəti kanal səviyyəsində yuxarıda qeyd olunan elementlər müxtəlif miqyaslı şəbəkə yaradır–şəbəkənin işçi qrupları, şöbə şəbəkəsi, nəhayət müəssisə və sairə. Şəbəkə səviyyəsində daha maraqlısı odur ki, müəyyən paketlərin sazlanması üçün onun zəbt olunması tələb olunur və sonradan analiz üçün müəyyən protokolların paketləri haqqında statiki informasiya təyin olunur.

Şəbəkənin müxtəlif elementlərində ibarət inteqrallaşdırılmış idarə etmə sisteminin yaradılması üçün çox səviyyəli iearxik yanaşmadan istifadı olunur. Istənilən tipli böyük sistemin yaradılması üçün bu prinsipcə standart yanaşmadan istifadə edilməsini tələb edir. Şəbəkənin idarə etmə sisteminə tətbiqi nöqtei–nəzərincə çoxsəviyyəli ierarxik sistemin yaradılması üçün ISO[1], İTU[2] və sairə təşkilatların birgə səyi nəticəsində işlənmiş TMN[3] standartından istifadə olunur. Əslində bu standart əvvəlcə Telekommunikasiya şəbəkəsi üçün nəzərdə tutulmuş, ancaq ümumi prinsiplərin istifadə istiqamətləri onun istənilən inteqrallaşdırılmışidarəetmə sisteminin yaradılması üçün daha faydalı hesab olunmuşdur[2]. TMN–modelinin OSİ etalon modeli ilə müqayisəli təsviri belədir (Şəkil 2).

Şəkil 2. TMN modelinin səviyyələri



1. *İSO, İnternational Organization for Standardiration – Beynəlxalq Standartlaşdırma təşkilatı, BST*
2. *İTU-T, Telelommunication Standardiration Sector-Telekommunikasiya Standartlaşma bölməsi, TSB*
3. *TMN, Telecominunicution Managment Network-Telekommunikasiya idarəetmə şəbəkəsi*

TMN modelinin ierarxiyasının hər səviyyəsində, yəni şəbəkə elementləri şəbəkə elementlərinin idarəsi, şəbəkənin idarəsi, xidmət olunmanın idarəsi və ticarətin idarəsində beş funksional qrupun (yuxarıda göstərilmişdir, səh) eyni məsələləri həll olunur. Ancaq bir səviyyədə bu məsələlərin özünəməxsus xüsusiyyəti vardır. Idarə olunma səviyyəsi nə qədər yüksək olarsa şəbəkə haqqında yığılan informasiya o qədər ümumi və vahid sistemli xarakterə malik olur. Son dərəcə texniki xarakter daşıyan yığılan verilənlər səviyyələr artdıqca onun istehsal, maliyyə və sairə göstəricilərində dəyişməyə başlayır. TMN modeli sadələşdirilmiş şəkildə iki ölçülü diaqramı kimi də təsvir oluna bilər[2].

Birinci aşağı səviyyə-şəbəkə elementləri səviyyəsi (ŞES-Network Element layer, NE)–ayrı-ayrı şəbəkə qurğularından ibarətdir: gücləndiricilər, kanalllar, son avadanlıqları, konsentratorlar, kommutatorlar, marşutizatorlar və.i.a.

İdarəolunmanın həyata keçirilməsi üçün elementlər araşdırılmış vasitələrdən ibarət ola bilər: idarə olunma interfeysləri, qəbuledici-ötürüclər, obyektlərlə əlaqə qurğusu (OƏQ) və sairə. Adətən müasir texnologiya qurğuların vəziyyətinin heç olmasa minimal əməliyyatlarının yerinə yetirilməsinə imkan verən quraşdırılmış idarə funksiyalarından ibarət olur. Buna oxşar funksiyalar FDDİ, İSDN, frame Relay, SD texnologiyalarında quraşdırılmış olur. Bu halda hətta xüsusi idarə bloku olmasada qurğu idarə etmə sistemini əhatə edə bilər.Ona görə ki, texnologiyanın protokolu bir sıra idarə etmə funksiyasını yerinə yetirməyə məcbur edir. Nəzarət və idarə olunma funksiyaları quraşdırılmayan, protokollarla işlənən qurğular ayrıca idarə bloku ilə təhciz olunur. Belə idarə blokları iki geniş yayılmış OSİ etalon mdelinin tətbiqi səviyyəsinə aid olan şəbəkənin idarə edilməsinin sadə SNMP[4] yaxud, idarəedici informasiyanın ümumi CMNP[5] protokollarından birinə istiqamətlənir.

İkinci səviyyə-şəbəkə elementlərinin idarəsi(Network element management layer, NEM) –idarə olunmanın elementar sistemlərindən ibarətdir. Elementar idarə sistemləri fərdi olaraq sistemin ayrı-ayrı elementləri idarə edir-SDH əlaqə kanalını nəzarət edir, kommutatoru yaxud multipleksoru idarə edir. Şəbəkə elementlərinin idarəsi səviyyəsi idarə olunma sisteminin yuxarı səviyyələrini konkret avadanlıqlarının hərəkətinin modelləşdirilməsinə məsuliyyət daşıyır. Bu modellərin əlamətləri idarə olunan resursların hərəkətlərinin müxtəlif aspektlərlə idarə olunmasına imkan verir. Adətən şəbəkənin elementar idarə olunma sistemləri avadanlıqları istehsal edənlər tərəfində işlənilir və sistemlərə yerləşdirilir.

İMN modelinin üçüncü səviyyəsi-şəbəkənin idarə olunma səviyyəsi (Network management layer, NM)-əsas kanalların konfiqurasiyasını nəzarət etməyə imkan verməklə elementar idarə etmə sistemlərinin işini azlaşdırır və.i.a. Bu səviyyənin köməyi ilə şəbəkə öz elementləri arasında verilənləri ötürməklə vahid bir sistem kimi işləməyə başlayır.

Növbəti dördüncü səviyyə-xidmətolunmanın idarəsi (Service managment layer, SM)-şəbəkənin son istifadəçilərinə təqdim olunan informasiya və nəqliyyat xidmətlərinin nəzarəti və idarə olunması ilə məşğul olur. Müəyyən xidmətlərin təqdimi üçün şəbəkənin hazırlanması, onun aktivləşdirilməsi, sifarişlərinin (müştərilərinin) çağrışlarının emalı və sairə məsələnin həlli bu səviyyəyə aid olunur.

Sonuncu beşinci səviyyə-ticarətin idarəsi (Tİ–Business managment layer, BM)–şəbəkəyə malik olan təşkilatın fəaliyyətinin maliyyə baxışının hesaba alınması ilə şəbəkənin uzun müd-

4. *SNMP, Simlpe Network Management Protocol – şəbəkə resurslarının idarə olunmasının sadə protokolu*
5. *CMİP, Common Managment İnformation Protocol - şəbəkənin idarə olunmasının ümumi protokolu*

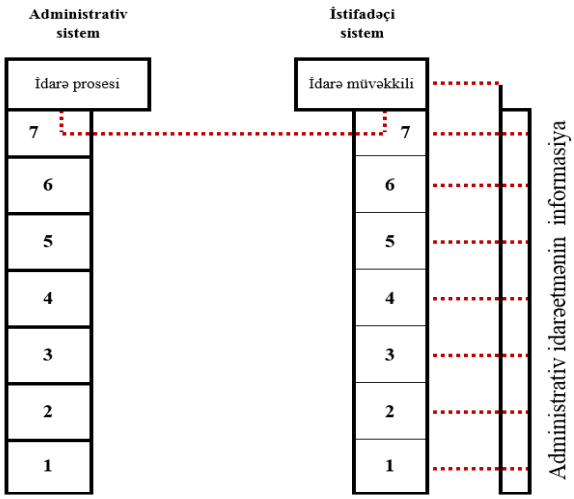
dətli planlaşdırılması məsələləri ilə məşğul olur. Bu səviyyədə aylıq və rüblər üzrə şəbəkə və onun tərkib hissəsindən gələn gəlirlər hesablanılır, şəbəkənin təkmilləşdirilməsinə və istismarına olan xərclər nəzərə alınmaqla, maliyyə imkanlarına və şəbəkənin inkişafına görə qərar qəbul olunur. Səviyyə istifadəçiləri və təchiz edənləri əlavə xidmətlərin təqdim olunması imkanı ilə təmin edir.

Şəbəkənin administrativ idarə olunma modeli

İstənilən mürəkkəb şəbəkə əlavə olaraq xüsusi idarəetmə vasitələri tələb edir. Buda şəbəkənin özünə məxsus əsas funksiyalarını yerinə yetirmək üçün müxtəlif çoxsaylı kommutasiya avadanlıqlarının olması ilə əlaqələndirilir.

Paylanmış xarakterli mürəkkəb şəbəkənin fəaliyyətinin onun kommutasiya avadanlıqları, konsentratorun, kommutatorun, multipleksorun və marşurtizatorun vəziyyətlərinə dair informasiyanı avtomatik rejimdə yığan və bu informasiyanı şəbəkənin operatoruna təqdim edən mərkəzləşdirilmiş idarə oluma olmadan onun tənzimlənməsi mümkün olmur. Adətən idarə etmə sistemi şəbəkənin idarə olunmasının olduqca sadə əməliyyatların həlli zamanı isə hazıranmış informasiya sistemi əsasında idarə etmə sistemi inteqrallaşdırıcıya gətirilir ki, bununla da ümumi məqsədə-istifadəçilərə keyfiyyətli xidmətə nail olması nəzərdə tutulur (şəkil 3).

Şəkil 3. Şəbəkənin idarə olunma modelinin strukturu



Qeyd olunan məsələnin qismində olsa həllinə nail olmaq üçün şəbəkənin idarə olunmasının yaradılması prinsipləri xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Şəbəkələrin paylanmış mühiti 'menecer-müvəkkil' modelinin istifadə edilməsinə səbəb olmuşdur. Menecerdə şəbəkənin idarə olunması sistemi kimi şəbəkənin administratoruna təqdim etmək üçün müvəkkillərdə informasiyanı yığan və emal olunmanı yerinə yetirən aparat proqram vasitələrindən ibarətdir. Bu informasiya əsasında şəbəkə administratoru menecerin köməyi ilə şəbəkə obyektlətinə idarə olunma siqnalları ilə təsir olunmanı həyata keçirir. Bu zaman idarə olunma müəyyən ölçüdə avtomatlaşdırılmış ola bilər. Müvəkkillər şəbəkənin idarə olunn elementlərində yerləşdirilmiş olur. Onlar bilavasitə idarə olunan obyektlərə qarşılıqlı əlaqədədir və idarə olunan parametrlərin verilənlər bazasına xidmət edir. İdarəetmə informasiya bazası (İİB-MİB, Managment Information Base) idarə olunan parametrlərdən və onların qiymətləri siyahısından ibarətdir, müvəkkillər isə obyektlərin real vəziyyəti ilə həmin informasiya bazasının uyğunluğuna cavab verir. Menecer oxuma əməliyyatını yerinə yetirməklə istənilən vaxt obyektin vəziyyəti haqqında informasiya sorğusu apara bilər və bu sorğuya cavab olaraq müvəkkil burada yerləşən

bütün verilənləri yaxud onun bir hissəsini ötürməyə məcburdur. Əgət icazəsi varsa buraya yazma şəbəkənin idarə olunma sistemi adətən hər birmenecerdən müvəkkillər qrupu aslı olan, bu menecerlər özüdə yüksək səviyyəli idarə olunmanın menecerləri üçün müvəkkil rolunu oynayan arxitekturaya malik ierarxik prinsiplə quraşdırılır.

Etibarlığın yüksəldilməsi üçün idarəolunma sisteminin mürəkkəbləşməsinə baxmayaraq belə arxitekturaya malik sistemlərdə menecerlər təkrarlana bilər. Belə səbəblərdən şəbəkənin idarə olunma sistemi yaradılan zaman onun maksimal mərkəzləşdirilməsinə cəhd olunur[9]. İdarə olunmanın müvəkkilləri həm şəbəkə komunikasiya qurğularında təkrarlayıcılarda, kommutatorlarda, marşutizatorlarda həm də şəbəkənin son qovşaq iştirak edirlər. İdarə olunmanın çoxsəviyyəli təşkilində menecer ümumi istifadəli kompüterlərdə fəaliyyət göstərən proqramdır[1,2].

Bir sözlə qeyd olunanları əhatə edən şəbəkə idarə olunma sistemi onun administratoruna bütün əlaqələri ilə şəbəkənin strukturuna aid olan informasiya ilə təmin olunur. Idarə olunun bütün obyektlərin-əlaqə xəttləri, son qovşaqlar, kommunikasiya avadanlıqlarının qovşaqlarının portları vəziyyətlərinə dair informasiya təqdim olunur.

Yuxarıda qeyd olunduğu kimi, şəbəkənin idarə olunmasınn çox səviyyəli təşkilini OSİ etalon modeli həll olunan məsələləri İSO beş funksional qrupa bölür: şəbəkənin konfiqurasiyasının və adlandırılmasını idarə olunması, məhsuldarlığın və etibarlığın analizi, təhlükəsizliyin idarə olunması, vasitələrin (resusrsların) istifadəsi və imtinaların emalı.

Şəbəkənin konfiqurasiyasının və adlandırılmasının idarə olunması məsələsi şəbəkə elementləri kimi parametrlərinin və eləcədə tam şəbəkənin konfiqurasiya olunması ilə nəticələnir. Marşurtizatorlar, konsentratorlar, kommutatorlar və.i.a. şəbəkə elementləri üçün bu qrup məsələlərin köməyi ilə şəbəkə ünvanları, identifikatorları (adları), coğrafi yerləşməsi və sairə--ləri təyin olunur. Tam şəbəkə üçün konfiqurasiyanın idarə olunması adətən şəbəkə kartının yaradılması ilə, yəni şəbəkə elementləri arasında real əlaqələrin təsviri və şəbəkə elementləri arasında əlaqələrin dəyişməsi–yeni fiziki yaxud məntiqi kanalların yaradılması, marşurtlaşma və kommutasiya cədvəllərinin dəyişməsi ilə başlayır.

Burada daha mürəkkəb məsələ kommutatorların, marşutizatorların, konsentratorların sazlanmasıdır ki, şəbəkə istifadəçiləri arasında virtual əlaqələr daha optimal təyin olunsun.

Məhsuldarlığın və etibarlılığın analizi məsələsi sistemin təsirlənmə (reaksiyası yaxud münasibəti) müddəti, şəbəkənin iki sonuncu abonenti arasında real yaxud virtual əlaqə kanalının buraxıcılıq qabiliyyəti ayrı-ayrı əlaqə kanallarında və seqmentlərdə trafikin intesivliyi, şəbəkə vasitəsi ilə verilənlərin ötürülməsi zamanı təhrif olunmanın ehtimalı, o cümlədən şəbəkənin hazır olma əmsalı kimi parametrlər əsasında yığılan statiki informasiyanın qiymətləndirilməsi ilə əlaqələndirilir.

Məhsuldarlığın və etibarlılığın analizinin funksiyaları şəbəkənin idarə olunmasının operativliyi və eləcədə şəbəkənin inkişafının planlaşdırılması üçün vacib hesab olunur. Bu məsələnin həllinin nəticəsi şəbəkənin administratoru və istifadəçiləri arasında bağlanmış xidmət olunma səviyyəsinin uzlaşmasının nəzarət və verilənlərin saxlanması və şəbəkədən ötürülməsi zaman verilənlərin tamlığının mühafizəsi kimi anlaşılır. Şəbəkənin baza elementləri kimi istifadəçilərin autentifikasiya mərhələsi, şəbəkənin resurslarına müraciət hüququnun yoxlanması, şifirlənmə açarının paylanması, səlahiyyətlərinidarə olunması və.i.a.

Resurslardan istifadə məsələsinə müxtəlif şəbəkə resurslarından istifadə olunma müddətinin qeydiyyatı–qurğular, kanallar və nəqliyyat xidmətləri aid olur.

İmtinaların emalı məsələlərinə imtinaların aşkarı və qeyd olunması, administratora xəbərdarlıq və işləmə qabiliyyətinin bərpası aid olunur. İmtina əlaməti meydana gələn zaman imkan daxilində şəbəkənin idarə etmə sistemi problemli sahəni təcrid edilməli, ehtiyyat elementlərgətirilməli, hadisəni prokollaşdırmalı, imtinalar ləğv edildikdən sonra ilkin konfiqurasiyanın bərpa edilməsi tələb olunur.

Şəbəkənin idarə olunma vasitələri və protokolları

Şəbəkənin beş idarəetmə və TMN modelinin beş səviyyələri çərçivəsində onların realizasiyası üçün beynəlxalq standartlaşma təşkilatı (BST) ilə müəyyən olunan idarəetmə vasitələrindən istifadə olunur (OSİ, İSO).

Bu vasitələr lokal şəbəkələrin idarə etmə sistemlərinə daxil edilir və bir neçə tip vasitələri özündə cəmləşdirir; nəzarət ölçü cihazları, şəbəkə manitorları, şəbəkə analizatorları və şəbəkənin inteqrallaşdırılmış idarə etmə sistemləri.

Şəbəkənin inteqrallşdırılmış idarə etmə sistemi bütün İSO ilə təyin olunan yuxarıda sadalanan funksional idarə etmə qruplarının funksiyalarını realizə edir.

Şəbəkənin idarə olunma protokolları əsasən müxtlif şəbəkələrdə onların işlənmə qabiliyyətinin diaqnostikasının təyini üçün işlənmişdir. Məsələn, menecer-müvəkkil modeli SNMP protokolu əsasında İnternet Standart və CMİP protokolu İSO\OSİ idarə etmə kimi geniş yayılmış standartları əsasında həllini tapır.

TCP\İP stekinin protokollar stekinin bir hissəsi olan SNMP(şəbəkə resurslarının idarə olunmasının sadə protokolu) OSİ etalon modelinin səviyyəsinin protokoludur. Hal-hazırda onun bir-biri ilə birbaşa uyğunuğu olmayan iki variantı-SNMPv1 və SNMPv2 fəaliyyət göstərir. Onun etibarlı autrntifikasiya və təhlükəsizliyin idarə olunmasını təmin edən üçüncü variantıda işlənilir.

SNMP protokolu öz fəaliyyətində aşağdakı anlayışlardan istifadə edir.

1) müvəkkilə təchiz olunan şəbəkənin idarə olunma qovşağı(aralıq yaxud sonuncu)-idarə qurğusu. Idarə edici qurğu informasiyanı yığma və idarəedici inforasiyanı saxlama qabiliyyətinə malikdir və SNMP protokolu ilə mübadilə edə bilir.
2) idarə olunan qurğuda yerləşən, idarəedici informasiyanı SNMP məlumatlar formatına çevirən(həmdə əksinə) proqram modulu–müvəkkil.
3) idarə edici qurğularla qarşılıqlı əlaqədə olan, proqram təminatı yerləşdirilmiş, kompüter-NMS[6] şəbəkənin idarə olunma sistemi.

SNMP məlumatları nəqliyyat səviyyəsinin UDP[7] (təsdiqlənməyən və çatdırılmasına zəmanət verilməyən) protokolunun köməyi ilə ötürülür. Məlumatlar variantlar identifikatorlu başlıqdan və "Ümumilik" sətrində-community və protokollu verilənlər blokundan (PDU)[8] ibarətdir.

Məlum olduğu kimi SNMP protokolu idarə olunma sistemlərinin əksəriyyətinə və eləcə də, administrativ idarə olunma sistemlərinədə onun əsası kimi xidmət göstərir. Bununla yanaşı bu protokolun prinsipial nöqsanları da vardır:

---

6. *NMS, Protocol Data Unit-verilənlərin protokollar bloku*
7. *UDP, User Dataqram Protocol – Birləşdirilməsi müəyyən olunmayan verilənlərin ötürülməsi protokolu*
8. *PDU, Network Management System-Şəbəkənin idarə olunma sistemi(komputer)*

1) müvəkkillərlə menecerlərin qarşılıqlı autentifikiasiya vasitələrinin olmaması. Yeganə autentifikasiya vasitəsi kimi məlumatlarda "ümumilik sətrinin" (community) istifadə olunmasıdır.
2) etibarlı olmayan UDP protokolundan istifadə edilməsi ilə müvəkkillərdən menecerlərə səhv-qərarlı məlumatların çatdırılması.

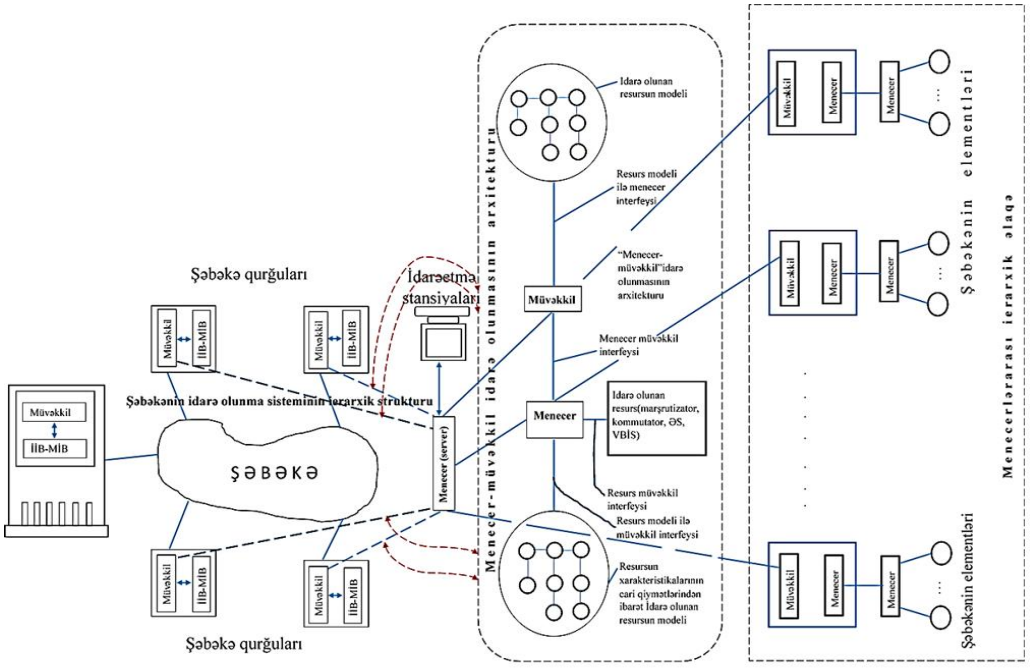
Şəbəkənin administrativ idarə olunmasının ierarxik arxitekturunun işlənməsi

Idarə etmə sistemlərində funksiyaların tipik qruplara və funksiyaların səviyyələrə bölünməsi hələlik idarə etmə sistemlərinin necə quraşdırılmasına, onların hansı elementlərdən ibarət olmasına və bu elementlərin praktikada hansı əlaqələr arxitekturundan ibarət olmasına cavab vermir.

Istənilən şəbəkənin idarə olunma sisteminin əsasında menecerlə müvəkkilin qarşılıqlı əlaqəli elementar sxemi durur. Bu sxem əsasında praktiki olaraq istənilən mürəkkəbliyə malik müxtəlif tipli çoxsaylı müvəkkil və menecerli şəbəkənin idarə etmə sistemini yaratmaq olar.

Müvəkkil idarə olunan resursla və əsas idarəedici proqramla-menecer arasında aralıq rolunu oynayır. Eyni bir menecerin müxtəlif real resursları idarə idarə etməsi məqsədi ilə onun nəzarəti üçün yalnız resursun xarakteristikalarını əks etdirən, idarə olunan resursun hər hansı modeli yaradılır. Məsələn, adətən marşutizatorun modelinə-portlaın sayı, onların tipi, marşurtlaşma cədvəli, kadrların sayı, kanal, şəbəkə, nəzqliyyat səviyyəsinin portları paketi kimi bu portlardan keçən xarakteristikaları daxil edilir.

Şəkil 4. Şəbəkənin idarə olunmasının ierarxikarxitekturası



Menecer müvəkkildən yalnız resursun modeli ilə təsviri verilmiş verilənləri qəbul edir. Əslində müvəkkil meneceri lazımsız informasiyadan azad edir, emal olunmuş və normal şəkilə salınmış informasiyanı ona təqdim edir.

Qəbul edilmiş bu informasiya əsasında şəbəkənin idarə olunmasına görə qərar qəbul edir, o cümlədən idarə olunan resurs haqqında ümumiləşdirilmiş verilənləri təyin edir. Məsələn, vaxta görə portun yüklənmə asılılığını müəyyənləşdirir.

Obyektlərdən tələb olunan verilənlərin alınması o cümlədən real resursla bəzi qeyri– standart üsulla qarşılıqlı əlaqədə olur. Müvəkkillər kommunikasiya avadanlığına quraşdırılarsa bu halda avadanlıqları işləyənlər müvəkkil ilə qurğuların daxili qovşaqlarının qarşılıqlı əlaqəlilik üsullarını və nöqtələrini nəzərə alır.

Menecer və müvəkkil eyni ilə idarə olunn resursun modelinə malik olmalıdır ki, əks təqdirdə onlar bir–birini başa düşməyə bilər. Ancaq müvəkkilin və menecerin bu modeldən istifadəsin əhəmiyyətli fərqlər vardır. Müvəkkil həmin resursun xarakteristikasının cari qiymətləri ilə idarə olunan resursun modelini doldurur, elə bununlada müvəkkil modeli idarəəedici informasiyanın verilənlər bazası adlanır (İİB–Managment İnformation Base, MİB). Menecer isə bu modeli resursun nə ilə xarakterizə olunmasını, müvəkkildən hansı xarakteristikaları soruşmasını və hansı parametrlərlə idarə olunmasını təyin etmək üçün istifadə edir. Ayrı–ayrı idarə etmə sistemlərinin arxitekturasının nəzərə alınması ilə şəbəkənin idarə olunmasının ierarxik arxitekturası belədir (şəkil 4).

Menecer müvəkkillə standart protokolla qarşılıqlı əlaqə saxlayır. Həmin protokol menecerə informasiyanın verilənlər bazasında (İİB–MİB) saxlanılan parametrlərin qiymətlərini soruşmağa, idarəedici informasiyanı müvəkkilə ötürməyə imkan yaratmalıdır.

Nəticə

1. Şəbəkənin idarə olunmasının bütün sistemlərinin əsasını "menecer–müvəkkil" sxemi təşkil edir. Bu sxem idarə olunan resursun abstrakt modelindən istifadə etməklə, ona informasiyanın idarə olunma bloku (İİB)–Managment İnformation Base (MİB) deyilir (Şəkil3).
2. Müvəkkil idarə olunnan resurslarla qeyri–standart interfeyslə, ancaq menecerlə qarşılıqlı əlaqəliliyi şəbəkə vasitəsilə standart protokollarla həyata keçirir.
3. Böyük idarə olunma sistemlərində isə bir neçə menecerdən istifadə olunur ki, onlarla qarşılıqlı əlaqəliliyi ierarxik prinsiplə həyata keçirilir (Şəkil 3).
4. Menecerlərin qarşılıqlı ierarxik sxemi TMN standartına uyğun gəlir və olduqca prespektiv hesab olunur (Şəkil 2).
5. Yuxarıda qeyd olunduğu kimi idarəetmə sistemlərinin daha geniş yayılan iki standart növü mövcuddur: SNMP protokolu əsasında idarə olunma sisteminin izahını verən internet standartları və CMIP idarə olunma protokoluna əsaslanan, İSO və İTU–T təşkilatları tərəfindən işlənmiş açıq sistemlərin (OSİ) idarə olunmasının beynəlxalq standartları.
6. Yuxarıda qeyd olunan yanaşmaya əsaslanaraq aparılan analizin məntiqi sonluğu kimi şəbəkənin administrativ idarə olunmasının ierarxik arxikteturu işlənmişdir (Şəkil 4).

ƏDƏBİYYAT

1. Э.Таненбаум "Компъютерные сети".4-е изд.-спб.: Питер, 2003-992 с.
2. В.Г. Олифер идр. "Компъютерные сети. Принципы, технологии, протоколы". Питер, 2003-864 с.
3. И. Шапошников "Компъютерные сети. Принципы, технологии, протоколы". спб.: 2006-304с.
4. Н.В. Максимов и др. "Компъютерные сети", М.Форум, 2010-464с.
5. Т. Паркер и др. "TCP/IP" спб.: Питер, 2004-859 с.
6. E.A. Balıyev, K.Ə. Əbilov "Açıqsistemlərdə verilənlərin ötürülməsi mühitinin analizi və qraf-modelinin işlənməsi", İnformasiya texnologiyaları problemləri, Bakı, 2017 N2, 48-55.
7. Z.Ə. Cəfərov "Telekommunikasiya şəbəkələrində ünvanlaşma sistemlərinin analizi" İnformasiya texnologiyaları problemləri, Bakı, 2014 N1, 69-80.
8. Э.Таненбаум и др. "Компъютерные сети". Питер, 2012. 960
9. М. Гук "Аппаратная средства локальных сетей – СПб: Питер, 2005 – 573с: ил

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2017. Volume 1, Number 2 *Pages 101-106*

UOT: 002

CERT KOMANDALARINDA İNSİDENT BİLETİNİN EMAL OLUNMASI İŞ YÜKÜNÜN PROQNOZLAŞDIRILMASI

Elşən BAĞIROV
AMEA İnformasiya Texnologiyaları İnstitutu
Bakı / AZƏRBAYCAN
elsenbagirov1995@gmail.com

XÜLASƏ

CERT komandalarının informasiya təhlükəsizliyi insident idarə edilməsi prosesində insident biletinin emal üçün təyin olunması önəmli rola malik olan fəaliyyətlərdən biridir. Biletlərin emal olunma müddətinin müxtəlifliyindən qaynaqlanaraq bu biletlərin iş yükünün emaledənlər arasında qeyri - bərabər paylanılması halı baş verə bilər.

Bu işdə, CERT komandalarında informasiya təhlükəsizliyi insident biletlərinin emal üçün yönləndirilməsi prosesini asanlaşdırmaq hədəf götürülmüşdür. İnsident biletlərinin emal olunma iş yükünün proqnozlaşdırılması üçün mətnlərin intellektual analizi texnologiyaları əsasında insident biletlərinin klassifikasiyasının tətbiqi imkanları tədqiq olunmuşdur. İş yükünün proqnozlaşdırılmasında indikator olaraq əvvəllər emal olunmuş insident biletlərinin yenilənmələrinin sayı götürülmüşdür. Emal olunmuş biletlər əsasında sözlərin biletə relevantlığını yoxlamaq üçün tf-idf metodu və yeni açılmış biletlərin əsasında Naive Bayes klassifikasiya metodu tətbiq edilmişdir.

Açar sözlər: CERT komandaları, insident bileti, tf-idf, Naive Bayes, klassifikasiya.

PREDICTION OF INCIDENT TICKET HANDLING WORKLOAD in CERTs

ABSTRACT

In the information security incident management, assigning of incident tickets for handling is one of the most important activities within CERTs. Due to the diversity of ticket handling duration, the non-equal distribution of the workload of these tickets between handlers may occur.

In this work, to facilitate the process of assigning of information security incident tickets for handling within CERTs have been targeted. The possibility of applying classification of incident tickets based on text mining for predicting workload of incident ticket handling has been explored. The number of incident tickets' updated history has been taken as an indicator for the predicting workload. Tf-idf method to check the relevance of words to incident ticket based on handled tickets and Naïve Bayes classification method based on newly opened tickets were applied.

Keywords: CERT teams, incident ticket, tf-idf, Naive Bayes, classification.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РАБОЧЕЙ НАГРУЗКИ ОБРАБОТКИ БИЛЕТОВ ИНЦИДЕНТОВ в КОМАНДЕ CERT

РЕЗЮМЕ

Назначение информационнаой безопасности команд CERT является одним из самых важных событий для обработки билета на инцидент в процессе управления инцидентами. Из-за различия во времени обработки билетов, может произойти неравномерное распределение рабочей нагрузки этих билетов между обрабатывающими субъектами.

Главной целью этой статьи является облегчение процесса перенаправления билетов на инцидент для обработки со стороны информационной безопасности команд CERT. Для прогнозирования рабочей нагрузки обработки билетов на инцидент, был исследован возможность применения классификации билетов на основе технологий интеллектуального анализа текстов. Количество обновлений ранее обработанных билетов на инцидент было принято в качестве индикатора для прогноза рабочей нагрузки. Чтобы проверить релевантность слов на билеты на основе обработанных билетов, были применены методы tf-idf и метод классификации Наивного Байеса, основывающийся на недавно открытые билеты.

Ключевые слова: команды CERT, билет на инцидент, tf-idf, метод Наивного Байеса, классификация.

GİRİŞ

Ən yaxşı formada təşkil olunmuş informasiya təhlükəsizliyi insfrastrukturu belə informasiya təhlükəsizliyi insidentlərinin baş verməyəcəyinə zəmanət verməkdə acizdir. İnsidentin

baş verməsi halında təşkilatlar üçün nəyin baş verdiyini aydınlaşdırmaq, onun cavablandırılmasına rəhbərlik etmək üçün effektiv yol tapmaq olduqca kritik bir məsələyə çevrilmişdir. Bir çox təşkilatların tərkibində informasiya təhlükəsizliyi ilə əlaqədar funksiyaların icra edilməsi üçün ayrıca bir komanda – Kompüter İnsidentlərini Cavablandırma Komandası (Computer Emergency Response Team,CERT) fəaliyyət göstərməkdədir. İnformasiya təhlükəsizliyi insidentlərinin idarə edilməsi prosesi CERT-lərin qarşısında duran ən vacib və ən çətin tapşırıqlardan biri hesab olunmaqdadır [1,2].

Yeni bir informasiya təhlükəsizliyi insidenti baş verən anda administratorlar və ya digər aidiyyatı şəxslər tərəfindən informasiya təhlükəsizliyiinsident bileti açılır. İnsident biletinin açılmasımüxtəlif növ sistem problemlərindən qaynaqlana bilər [2]. İnsident CERT heyəti tərəfindən aşkarlana və ya hər hansı bir mənbədən bildirilə bilər. Bu halda əsasən insident siniflərdirilir, prioritet təyin edilir və sonrakı fəaliyyət üçün növbəyə durur. Növbəti mərhələdə insident üzərində təhqiqat aparılır (nəyin baş verməyi, təsiri və s. analizlərinin təhlili). Yekun olaraq, insidenti həll etmək üçün mühüm tədbirlər ardıcıl olaraq həyata keçirilir. Avropa Şəbəkə və İnformasiya Təhlükəsizliyi Təşkilatı (European Network and Information Security, ENISA) tərəfindən nəşr edilmiş praktiki təlimatlar toplusunda insidentlərin emal olunması prosesinin insidentin bildirilməsi, qeydiyyatı, təsdiq olunması, ilkin klassifikasiyası, emal edən şəxsə təyin olunması, həll olunması (*ing.* resolution), bağlanması, son analizlər, insidentin açıqlanması və keyfiyyətin test edilməsi kimi ardıcıl mərhələlərdən təşkil olunması tövsiyə edilmişdir [3].

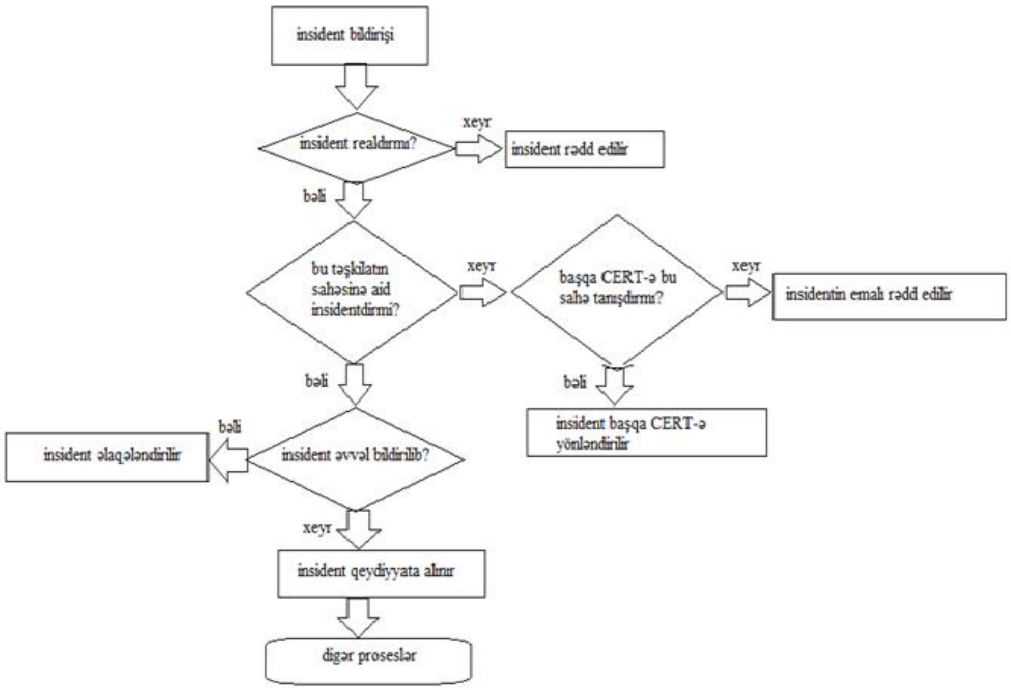
İnsident Bilet Sistemi (İBS) informasiya təhlükəsizliyi insidentlərinin həll olunmasında koordinasiya, problemaradanqaldırma (*ing.* troubleshooting), arxivləşdirmə və digər məsələlər üçün əsas rol oynayan vasitələrdən biridir. Yaxşı təşkil olunmuş İBS sayəsində insidentlərin idarə edilməsi proseslərinin effektivliyi və səmərəliliyi xeyli dərəcədə arta bilər [5].İBS-də biletlərin emal olunması iş yükünün proqnozlaşdırılması birbaşa olaraq biletin təyin olunması altmərhələsini optimallaşdırmaqda olduqca əhəmiyyətlidir [4].

İNSİDENTİN AŞKARLANMASI VƏ QEYDİYYATI

İnsidentlər müxtəlif mənbələrdən aşkarlana bilər. CERT-lər elektron poçt, faks, telefon zəngləri, veb-saytlardan insident bildirişiqəbul edə bilərlər. İnsident emalı sistemində insident bildirişi insidentin aşkar olunmasından sonra formal olaraq qeydiyyata alınır. Əksər insident emalı sistemləri bunu avtomatik olaraq həyata keçirir. Əgər əvvəl qeydiyyatdan keçmiş insidentlə əlaqədar insident bildirişi varsa, hər iki bildiriş birləşdirilə, əlaqələndirilə bilər. CERT-lər tərəfindən standart qəbul edilmiş qeydiyyat forması mövcud deyil. Qeydiyyat forması onların əksəriyyətinin öz tələblərinə uyğun olaraq tərtib olunur. Belə forma CERT-lərin öz vebsaytında HTML və ya açıq mətn formatında yerləşdirilə bilər [3].

ENISA tərəfindən insidentin aşkarlanması və qeydiyyata alınması prosesləri blok-sxemlərlə şəkil 1-dəki kimi verilmişdir.

Şəkil 1. İnsidentlərin aşkarlanması və qeydiyyatı blok-sxemi.



İNSİDENTİN VERİFİKASİYASI

Verifikasiya mərhələsində insident bildirişinin real insidentlə əlaqəli olub olmadığı yoxlamadan keçirilir. Bəzən əhəmiyyətsiz bildirişlər göndərilə bilər ki, onların sayı az olduqda cavab mesajı göndərmək olar, lakin həddindən artıq olduqda vaxtı itkisinə yol verməmək üçün belə bildirişlərə cavab göndərməkdən imtina edilir.

Ümumiyyətlə, yaxşı olardı ki, insident bildirişinə heç olmasa bir dəfə avtocavab mexanizmi vasitəsilə reaksiya verilsin. Avtocavabda aşağıdakı məlumatların olması arzuediləndir:

- *Bildiriş üçün minnətdarlıq;*
- *Bildirişlə nə ediləcəyi barədə qısa məlumat;*
- *İnsidenti bildirəni növbəti mərhələdə nəyin gözləməyi.*

Cədvəl 1-də avtocavab nümunəsi əks edilmişdir [3].

Cədvəl 1. Avtocavab nümunəsi

CERT X avtocavab
Salam,
Sizin bildiriş qəbul edildi. Bəzi hallarda bu məsələ ilə əlaqədar olaraq, sizin sistem administratorları, hüquq-mühafizə orqanları və digər insident cavablandırma komandaları ilə əlaqə yaradıla bilər. Qeyd edək ki, insident təsdiqlənmədikcə insidenti bildirən şəxs haqqında heç bir məlumatı paylaşmırıq.
Yalnız ehtiyac olduqda sizinlə əlaqə saxlayacağıq.
Hörmətlə,
CERT X

TF-IDF VƏ NAÏVE BAYES METODU VASİTƏSİLƏ İNSİDENTLƏRİN KLASSİFİKASİYASI

Metodun məqsədi insident bileti yaradılarkən bu biletin emal edilmə vaxtının uzun və ya qısa olmasını əvvəlcədən təyin etməkdir. Bu, insidentin emal olunma mərhələsinin bir altmər-

hələsi olan biletin təyin olunması işini xeyli asanlaşdırmış olur. Belə ki, həll tələb edən biletlərin ümumi emal vaxtını proqnoz etməklə bu biletləri həll etmək üçün təyin olunmuş şəxslər arasında optimal paylamaq və bununla da CERT-lərdə biletlərin tez bir zamanda həll olunmasına nail olmaq, yüklənmənin qarşısını almaq olar.

İnsidentin bağlanması üçün aparılan əməliyyatların tez və ya gec başa gələ biləcəyini göstərən indikator olaraq insident yenilənmələrinin sayını götürmək nəzərdə tutulmuşdur. İnsident biletlərinin klassifikasiyası iki sinif əsasında aparılacaqdır:

- *Həll uzun vaxt tələb edən biletlər;*
- *Həll qısa vaxt tələb edən biletlər.*

Üsulun əsas ideyası keçmiş insident biletlərinin yenilənmələri və yeni biletə məxsus mətn xarakteristikalarından istifadə edərək, onun hansı kateqoriyaya (uzun və ya qısa müddətdə həll olunacaq biletlər) aid olduğunu təyin etməkdir.

Biletlərin klassifikasiyası üçün, ümumiyyətlə, aşağıdakı mərhələlər ardıcıllığı gözlənilməlidir [6].

- *biletin (sənədin) ilkin emalı*: biletdə mövcud olan html teqləri, biletin mahiyyətini açmayan sözlər (ing. *stop words*), nadir rast gəlinən sözlər kənarlaşdırılır.
- *biletin çevrilməsi*: biletlər kompüterin başa düşə biləcəyi dilə çevrilir. (Vektor fəza modeli geniş istifadə olunur)
- *ölçünün azaldılması:* biletdən bütün sözlərin deyil, yalnız müəyyən mənaya malik olan sözlərin seçilməsi, digərlərinin atılması nəzərdə tutulur.
- *modelin öyrədilməsi:* biletlərin sinifləndirilməsi üçün əsas mərhələdir. Öyrədici toplu əsasında model öyrədilir.
- *modelin test edilməsi və qiymətləndirilməsi.* Əvvəlki mərhələdə öyrədilmiş model əsasında test toplusu klassifikasiya edilir və qiymətləndirmə üçün müəyyən metrikalar seçilir.

Tutaq ki, $T=\{t_1,t_2,\ldots\}$həll olunmuş insident biletləri çoxluğu və hər bir biletin mətninin onların yenilənmə tarixinə görə hansı kateqoriayaya uyğun olan C={uzun, qısa} kateqoriyalar çoxluğu məlumdur. Biletin hansı kateqoriyaya uyğun gəldiyini göstərən aşağıdakı inikas funksiyası daxil edilir:

$$L : T \rightarrow C$$

Yeni yaradılmış t_y biletinin hansı kateqoriyaya aid olduğu məlum deyil. Buna görə də keçmiş insident biletləri əsasında yeni biletə uyğun kateqoriya təyin etmək üçün $\grave{L}: \{t_y\} \rightarrow C$ ehtimal funksiyasından istifadə olunur.

İlk olaraq tf-idf-in mahiyyətini izah etməyə çalışaq. Tutaq ki, bütün keçmiş T biletlər çoxluğuna daxil olan $W=\{w_1 ,w_2,...\}$ sözlər çoxluğu vardır. w_i sözünün t_j mətnində rast gəlmə tezliyi tf – terim tezliyi ilə işarə olunur və aşağıdakı kimi qiymətləndirilir:

$$tf\,(w_i , t_j) = \frac{n\,(i,j)}{\sum_k n\,(k,j)}$$

Aydındır ki, bu nisbətin qiyməti w_i sözünün t_j mətnində rast gəlməsi sayı ilə düz mütənasib asılılıq təşkil edir.

idf ilə bütün mətn sayının w_i sözü daxil olan mətnlərin sayına olan nisbəti ifadə olunmuşdur:

$$idf\,(w_i) = log\frac{|T|}{\sum_k \delta(w_i,t_k)},$$

$$\delta(w_i, t_k) = \begin{cases} 1: \text{əgər } t_k \text{mətninə } w_i \text{ sözü daxildirsə} \\ 0: \text{əks halda} \end{cases}$$

Göründüyü kimi, *idf*(w_i)-in qiymətiw$_i$ sözünün T mətn çoxluğunda rast gəlmə tezliyi ilə tərs mütənasib asılılıq təşkil edir.

Hər bir sözün sənəd üçün vacibliyini müəyyən etmək üçün yuxarıda verilmiş tf və idf düsturlarının hasili olan tf-idf daxil edilir:

$$f_{i,j} = tf\text{-}idf(w_i, t_j) = tf\,(w_i, t_j) * idf\,(w_i)$$

idf düsturunda kəsrin sürəti və məxrəci bərabər olan halda, tf-idf-in qiymətinin sıfıra bərabər olacaqdır. Bu hal, adətən, kiçik ölçülü bazalarda tez-tez rast gəlinən haldır. Belə hallarla qarşılaşmamaq üçün aşağıda verilmiş hamarlama metodu ilə formulu modifikasiya etmək olar:

$$f_{i,j} = tf\text{-}idf(w_i, t_j) = \log(tf\,(w_i, t_j) + 1.0) * log\frac{|T|+1.0}{\sum_k \delta(w_i,t_k)}$$

Bundan sonra Naive Bayes modeli ilə klassifikasiya modelini vermək olar. Yuxarıda verilmiş tf-idf düsturundan istifadə edərək, c ilə siniflərdirilən mətnlərdə rast gəlinən w$_i$ sözünün $\hat{\theta}_{c,i}$-həqiqətəoxşarlığın maksimumu düsturu aşağıdakı kimi verilir:

$$\hat{\theta}_{c,i} = \frac{\sum_{j:l(t_j)=c} f_{i,j} + \alpha_i}{\sum_{j:l(t_j)=c} \sum_k f_{k,j} + \alpha}$$

Burada, α_i – hər bir w_i sözü üçün bir hamarlama parametridir və $\alpha = \sum_i \alpha_i$ doğrudur. Praktikada, əksər hallarda $\alpha_i = 1$ götürülür.

Fərz edək ki, t$_y$ –yeni insident bilet mətnində w$_i$ sözünün miqdarını göstərən d$_i$–lər üçün t$_y$ = (d$_1$,d$_2$,...) yazılışı doğrudur. Onda, axtardığımız model -$\grave{L}$(t$_y$) aşağıdakı kimi təyin olunacaq:

$$\grave{L}(t_y) = \text{argmax}_c \sum_i (d_i * log\hat{\theta}_{c,i})$$

Bu funksiya vasitəsilə axtarılan kateqoriya qiyməti (uzun, qısa)əldə olunur.Əldə olunmuş ehtimallar əsasında yeni gələn biletləri emal üçün təyin olunacaq şəxslər arasında optimal paylamaqla CERT komandalarının iş yükünü əhəmiyyətli dərəcədə azaltmaq olar.

Nəticə

Məqalədə,informasiya təhlükəsizliyi insidentlərinin idarə edilməsi üçün qurulan CERT komandalarında İnsident Bilet Sisteminin rolu, bir neçə insident emaletmə prosesi aydınlaşdırılmış, biletin emaledənə yönləndirilməsi məsələsini asanlaşdırmaq üçün mətnlərin intellektual analizi və supervizorlu öyrənmə əsaslı metodun birgə istifadəsi təklif edilmişdir. Həll olunmuş insident biletləri əsasında öncədən təyin edilməli olan iki sinfi müəyyən etmək üçün bu biletlərin yenilənmə xronologiyalarının sayını götürmək məqbul hesab edilmişdir. Belə ki, bu ədədin böyüklüyü biletin çətin emal olunması ilə xarakterizə edilmişdir. Biletin çətin emal olunanlığını müəyyən edən indikator olaraq onun açılma və bağlanma tarixinin fərqini götürmək də olardı. Lakin nəzərə alınmalıdır ki, alınmış fərq biletin prioritetlik xarakteristikasından əhəmiyyətli dərəcədə asılıdır və biletin uzun müddət həll olunmamış qalması heç də onun çətin emalolunanlığı ilə izah edilmir.

ƏDƏBİYYAT SİYAHISI

1. R.Əliquliyev, Y.İmamverdiyev, "İnformasiya təhlükəsizliyi insidentləri", İnformasiya Texnologiyaları nəşriyyatı, 2012, 219 s.
2. İmamverdiyev Y. N., Bağırov E. O. CERT üçün insident verilənlərinin intellektual analizi / İnformasiya təhlükəsizliyinin aktual problemləri III respublika elmi-praktiki seminarı. Bakı: İnformasiya Texnologiyaları Nəşriyyatı, 2017, s.125-128
3. Good Practice Guide for Incident Management. European Network and Information Security Agency,2010, 110 p.
4. Kikuchi S. Prediction of Workloads in Incident Management Based on Incident Ticket Updating History / IEEE/ACM 8th International Conference on Utility and Cloud Computing, Limassol: IEEE, 2015, pp.333-340.
5. S. Salah et al. "A model for İncident Tickets Correlation in Network", Department of Signal Theory, Telematics and Communications, University of Granada, Spain, 2015, 35 p.
6. Liu M., Yang J. An improvement of TFIDF weighting in text categorization / International Conference on Computer Technology and Science, Singapore: IPCSIT, 2012, pp.44-47.

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2017. Volume 1, Number 2 *Pages 107-117*

УДК 517.977.56

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ГУРСА-ДАРБУ

К.Б. МАНСИМОВ, В.А. СУЛЕЙМАНОВА

Бакинский Государственный Университет

Институт Систем Управления НАН Азербайджана

Сумгаитский Государственный Университет

kamilbmansimov@gmail.com, kmansimov@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Изучается граничная задача оптимального управления системами Гурса-Дарбу с многоточечным критерием качества при предположении выпуклости области управления. Установлен аналог линеаризованного условия максимума. Выведены необходимые условия оптимальности квазиособых управлений.

Ключевые слова: граничное управление, система Гурса-Дарбу, многоточечный функционал, необходимое условие оптимальности, линеаризованный принцип максимума, аналог условия Габасова-Кириллової, квазиособый случай.

ON ONE BOUNDARY OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF GOURSAT-DARBOUX SYSTEMS

ABSTRACT

In the paper study the one boundary optimal control problem described of the Goursat-Darboux systems with a multipoint quality criterion under the assumption convexity of the domain of control. The necessary optimality conditions of quasi-singular controls are introduced.

Keywords: boundary control, Goursat-Darboux system, multipoint functional, necessary optimality condition, linearized maximum principle, analog of condition Gabasov-Kirillovs, quasi-singular case.

QURSA-DARBU SİSTEMLƏRİ İLƏ BİR SƏRHƏD OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

XÜLASƏ

Məqalədə Qursa-Darbu sistemi ilə təsvir olunan bir sərhəd optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. İdarə oblastının qabarıqlığı sinfi daxilində optimallıq üçün xəttiləşdirilmiş maksimum şərti daxilində birinci tərtib zəruri şərt isbat olunmuş, sonra bu zəruri şərtin cırlaşdığı hal tədqiq edilmişdir.

1. Введение. Задачи оптимального управления описываемые системами Гурса-Дарбу и с управляемым граничным условиям начали изучатся с работ А.И. Егорова [1, 2]. В дальнейшем в работах [3-14] и др. получены ряд необходимых условий оптимальности и доказаны теоремы существования оптимальных распределенных и граничных управлений. Обзор соответствующих результатов имеется, например в [14- 16].

В настоящей работе исследуется одна граничная задача оптимального управления описываемая системой Гурса-Дарбу и многоточечным функционалам качества при предположении выпуклости области управления. Установлено необходимое условие оптимальности в форме линеаризованного условия максимума и исследован случай его вырождения.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$\mathrm{I}(\mathrm{u}) = \varphi\left(a(T_1), a(T_2), \ldots, a(T_k)\right) + G\left(z(T_1, X_1), \ldots, z(T_k, X_k)\right) \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$u(t)\in U\subset R^r,\ t\in T=[t_0,t_1], \tag{2.2}$$

$$z_{tx}=B(t,x)z_t+f(t,x,z,z_x),\ (t,x)\in D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1], \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &z(t,x_0)=a(t), \quad t\in T=[t_0,t_1],\\ &z(t_0,x)=b(x), \quad x\in X=[x_0,x_1], \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$a(t_0)=b(x_0)=a_0,$$

$$\dot{a}=g(t,a,u), \quad t\in T, \tag{2.5}$$

$$a(t_0)=a_0. \tag{2.6}$$

Здесь $f(t,x,z,z_x)$-заданная n-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z,z_x до второго порядка включительно, $B(t,x)$ – заданная измеримая и ограниченная $(n\times n)$ матричная функция, $b(x)$ – заданная n-мерная абсолютна непрерывная вектор-функция, t_0,t_1,x_0,x_1 – $(t_0<t_1;\ x_0<x_1)$ – заданы, (T_i,X_i), $i=\overline{1,k}$ $(t_0<T_1<T_2<\ldots<T_k\le t_1;\ x_0<X_1<X_2<\ldots<X_k\le x_1)$-заданные точки, a_0 – заданный постоянный вектор, $g(t,a,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (a,u) до второго порядка включительно, $\varphi(a)$ и $G(z)$-заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции, U – заданное непустое, ограниченное и выпуклое множество, $u(t)$ – измеримая и ограниченная r-мерная управляющая вектор-функция.

Каждую управляющую функцию $u(t)$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что при заданном допустимом управлении $u(t)$ задача Коши (2.5)-(2.6) и задача Гурса (2.3)-(2.4) имеют единственное абсолютно непрерывное решение (в смысле [17, 10]) $a(t)$ и $z(t,x)$ соответственно.

Допустимое управление $u(t)$ доставляющее минимум функционалу (2.1) при ограничениях (2.2)-(2.6) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t),a(t),z(t,x))$ – оптимальным процессом.

3. Специальное приращение функционала качества. Считая $(u(t),a(t),z(t,x))$ фиксированным допустимым процессом введем обозначения

$$M(t,a,u,q)=q'\,g(t,a,u),$$

$$H(t,x,z,z_x,\psi)=\psi'\,f(t,x,z,z_x),$$

$$M_a(t,a(t),u(t),q(t))=M_a(t),$$

$$M_{aa}(t,a(t),u(t),q(t))=M_{aa}(t),$$

$$M_{ua}(t,a(t),u(t),q(t))=M_{ua}(t),$$

$$M_{uu}(t,a(t),u(t),q(t))=M_{uu}(t),$$

$$H_z(t,x,z(t,x),z_x(t,x),\psi(t,x))=H_z(t,x),$$

$$H_{zz}(t,x,z(t,x),z_x(t,x),\psi(t,x))=H_{zz}(t,x),$$

$$H_{zz_x}(t,x,z(t,x),z_x(t,x),\psi(t,x)) = H_{zz_x}(t,x),$$
$$g_a(t,a(t),u(t)) = g_a(t),$$
$$f_z(t,x,z(t,x),z_x(t,x)) = f_z(t,x),$$
$$f_{z_x}(t,x,z(t,x),z_x(t,x)) = f_{z_x}(t,x),$$

где $\psi = \psi(t,x)$ и $q = q(t)$ пока неизвестные n-мерные вектор-функции, а $(')$ штрих означает операцию транспонирование.

Через $(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t),\ \bar{a}(x) = a(x) + \Delta a(x),\ \bar{z}(t,x) = z(t,x) + \Delta z(t,x))$ обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение критерия качества

$$\begin{aligned}\Delta \mathrm{I}(\mathrm{u}) = \mathrm{I}(\bar{\mathrm{u}}) - \mathrm{I}(\mathrm{u}) = [\varphi(\bar{a}(\mathrm{T}_1),\ldots,\bar{a}(\mathrm{T}_k)) - \varphi(a(T_1),\ldots,a(T_k))] + \\ + [G(\bar{z}(T_1,X_1),\ldots,\bar{z}(T_k,X_k)) - G(z(T_1,X_1),\ldots,z(T_k,X_k))].\end{aligned} \tag{3.1}$$

Далее ясно, что приращение $(\Delta a(t), \Delta z(t,x))$ – состояния $(a(t), z(t,x))$ есть решение задачи

$$\Delta \dot{a} = g(t,\bar{a},\bar{u}) - g(t,a,u), \tag{3.2}$$
$$\Delta a(t_0) = 0, \tag{3.3}$$
$$\Delta z_{tx} = B(t,x)\Delta z_t + f(t,x,\bar{z},\bar{z}_x) - f(t,x,z,z_x), \tag{3.4}$$
$$\begin{aligned}&\Delta z(t,x_0) = \Delta a(t), \quad t \in T,\\ &\Delta z(t_0,x) = 0, \quad x \in X.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Умножая обе части соотношения (3.2) ((3.4)) слева скалярно на $q(t)$ $(\psi(t,x))$, а затем интегрируя обе части полученного соотношения по T (по D) получим

$$\int_{t_0}^{t_1} q'(t)\Delta\dot{a}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1}[M(t,\bar{a}(t),\bar{u}(t),q(t)) - M(t,a(t),u(t),q(t))]dt, \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)B(t,x)\Delta z_t(t,x)dx\,dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}[H(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{z}_x(t,x),\psi(t,x)) - H(t,x,z(t,x),z_x(t,x),\psi(t,x))]dx\,dt.\end{aligned} \tag{3.7}$$

С учетом тождеств (3.6) и (3.7) формула приращения (3.1) записывается в виде

$$\begin{aligned}\Delta \mathrm{I}(\mathrm{u}) = \varphi(\bar{a}(t_1)) - \varphi(a(t_1)) + G(\bar{z}(t_1,x_1)) - G(z(t_1,x_1)) + \int_{t_0}^{t_1} q'(t)\Delta\dot{a}(t)dt - \int_{t_0}^{t_1}[M(t,\bar{a}(t),\bar{u}(t),q(t)) - \\ - M(t,a(t),u(t),q(t))]dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)B(t,x)\Delta z_t(t,x)dx\,dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}[H(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{z}_x(t,x),\psi(t,x)) - H(t,x,z(t,x),z_x(t,x),\psi(t,x))]dx\,dt.\end{aligned}$$

Отсюда используя формулу Тейлора, будем иметь

$$\begin{aligned}I(\mathrm{u}) = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi'(a(T_1),\ldots,a(T_k))}{\partial a_k}\Delta a(T_k) + \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial G(z(T_1,X_1),\ldots,z(T_k,X_k))}{\partial z_k}\Delta z(T_k,X_k) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta a'(T_i)\frac{\partial^2\varphi(a(T_1),\ldots,a(T_k))}{\partial a_i\,\partial x_j}\Delta x(T_j) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta z'(T_i,X_i)\frac{\partial^2 G'(z(T_1,X_1),\ldots,z(T_k,X_k))}{\partial z_i\,\partial z_j}\Delta z(T_j,X_j) + \\ + \int_{t_0}^{t_1} q'(t)\Delta\dot{a}(t)dt - \int_{t_0}^{t_1}[M'_a(t)\Delta u(t) + M'_u(t)\Delta u(t)]dt - \\ - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[\Delta a'(t)M_{aa}(t)\Delta a(t) + 2\Delta u'(t)M_{ua}(t)\Delta a(t) + \Delta u'(t)M_{uu}(t)\Delta u(t)]dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt -\end{aligned}$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)B(t,x)\Delta z_t(t,x)dx\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[H_z'(t,x)\Delta z(t,x)+H_{z_x}'(t,x)\Delta z_x(t,x)\right]dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)+\Delta z_x'(t,x)H_{z_xz}(t,x)\Delta z(t,x)+\Delta z'(t,x)H_{zz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x)+\right. \tag{3.8}$$

$$\left.+\Delta z_x'(t,x)H_{z_xz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x)\right]dx\,dt+o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\|\Delta a(T_i)\|\right]^2\right)+o_2\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|\right]^2\right)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}o_3\left(\left[\|\Delta u(t)\|+\|\Delta a(t)\|\right]^2\right)dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_4\left(\left[\|\Delta z(t,x)\|+\|\Delta z_x(t,x)\|\right]^2\right)dx\,dt,$$

где $o(\alpha^2)/\alpha^2\to 0$ при $\alpha\to 0$.

Ясно, что

$$\Delta a(t)=\int_{t_0}^{t}\Delta\dot a(\tau)d\tau, \tag{3.9}$$

$$\Delta z(t,x)=\Delta a(t)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\Delta z_{ts}(\tau,s)ds\,d\tau, \tag{3.10}$$

$$\Delta z_t(t,x)=\Delta\dot a(t)+\int_{x_0}^{x}\Delta z_{ts}(t,s)ds, \tag{3.11}$$

$$\Delta z_x(t,x)=\int_{t_0}^{t}\Delta z_{tx}(\tau,x)d\tau, \tag{3.12}$$

$$\Delta a(T_i)=\int_{t_0}^{t_1}\alpha_i(t)\Delta\dot a(t)dt,$$

$$\Delta z(T_i,X_i)=\Delta a(T_i)+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\beta_i(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt,$$

где $\alpha_i(t)$ $(\beta_i(t,x))$ характеристическая функция отрезка $[t_0,T_i]$ (области $[t_0,T_i]\times[x_0,X_i]$).

Используя формулы (3.9)-(3.12) и применяя формулу Дирихле (см. напр. [17]) можно доказать, что

$$\int_{t_0}^{t}M_a'(t)\Delta a(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}M_a'(\tau)d\tau\right]\Delta\dot a(t)dt, \tag{3.13}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)B(t,x)\Delta z_t(t,x)dx\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)B(t,x)\Delta\dot a(t)dx\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{s}^{x_1}\psi'(t,s)B(t,s)ds\right]\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt, \tag{3.14}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H_z'(t,x)\Delta z(t,x)dx\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}H_z'(\tau,x)d\tau\right]\Delta\dot a(t)dx\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1}H_z'(\tau,s)ds\,d\tau\right]\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt, \tag{3.15}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H_{z_x}'(t,x)\Delta z_x(t,x)dx\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}H_{z_x}'(\tau,x)d\tau\right]\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt, \tag{3.16}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi'(a(T_1),\ldots,a(T_k))}{\partial a_k}\Delta a(T_k)=\int_{t_0}^{t_1}\alpha_i(t)\frac{\partial\varphi'(a(T_1),\ldots,a(T_k))}{\partial a_k}\Delta\dot a(t)dt, \tag{3.17}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial G'(z(T_1,X_1),\ldots,z(T_k,X_k))}{\partial z_i}\Delta z(T_i,X_i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial G'(z(T_1,X_1),\ldots,z(T_k,X_k))}{\partial z_i}\Delta a(T_i)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial G'(z(T_1,X_1),\ldots,z(T_k,X_k))}{\partial z_i}\beta_i(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt= \tag{3.18}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \alpha_i(t) \frac{\partial G'(z(T_1,X_1),\ldots,z(T_k,X_k))}{\partial z_i} \Delta\dot{a}(t)dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \beta_i(t,x) \frac{\partial G'(z(T_1,X_1),\ldots,z(T_k,X_k))}{\partial z_i} \Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt.$$

С учетом доказанных тождеств (3.13)-(3.18) формула (3.8) для приращения функционала качества (2.1) представляется в виде

$$\begin{aligned}
\Delta \mathrm{I}(\mathrm{u}) &= -\int_t^{t_1} M'_u(t)\Delta \mathrm{u}(t)dt + \\
&+ \int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) \frac{\partial \varphi(a(T_1),\ldots,a(T_k))}{\partial a_k} + q(t) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) \frac{\partial G'(z(T_1,X_1),\ldots,z(T_k,X_k))}{\partial z_i} - \int_t^{t_1} M_a(\tau)d\tau - \\
&- \int_{x_0}^{x_1}\int_t^{t_1} H_z(\tau,x)dx\,d\tau - \int_{x_0}^{x_1} B'(t,x)\psi(t,x)dx\Bigg]' \Delta\dot{a}(t)dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Bigg[\sum_{i=1}^{k} \beta_i(t,x) \frac{\partial G'(z(T_1,X_1),\ldots,z(T_k,X_k))}{\partial z_i} - \\
&- \psi(t,x) - \int_s^{x_1} B'(t,s)\psi(t,s)ds - \int_t^{t_1}\int_x^{x_1} H'_z(\tau,s)d\tau\,ds - \int_t^{t_1} H_{z_x}(\tau,x)d\tau\Bigg]' \Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} \Delta a'(T_i) \frac{\partial^2 \varphi(a(T_1),\ldots,a(T_k))}{\partial a_i\,\partial a_j} \Delta a(T_j) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} \Delta z'(T_i,X_i) \frac{\partial G(z(T_1,X_1),\ldots,z(T_k,X_k))}{\partial z_i\,\partial z_j} \Delta z(T_j,X_j) - \\
&- \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta a'(t)M_{aa}(t)\Delta a(t) + 2\,\Delta u'(t)M_{ua}(t)\Delta a(t) + \Delta u'(t)M_{uu}(t)\Delta u(t)\right]dt - \\
&- \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x) + \Delta z'(t,x)H_{zz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x) + \Delta z'_x(t,x)H_{z_xz}(t,x)\Delta z(t,x) + \right. \\
&\left. + \Delta z'_x(t,x)H_{z_xz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x)\right]dx\,dt + o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\|\Delta a(T_i)\|\right]^2\right) + o_2\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|\right]^2\right) + \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} o_3\left(\left[\|\Delta a(t)\| + \|\Delta u(t)\|\right]^2\right)dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} o_4\left(\left[\|\Delta z(t,x)\| + \|\Delta z_x(t,x)\|\right]^2\right)dx\,dt.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Если предполагать, что $(\psi(t,x),q(t))$ является решением системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
\psi(\mathrm{t},\mathrm{x}) &= -\sum_{i=1}^{k} \beta_i(t,x) \frac{\partial G(z(T_1,X_1),\ldots,z(T_k,X_k))}{\partial z_i} + \int_s^{x_1} B'(t,s)\psi(t,s)ds + \\
&+ \int_t^{t_1}\int_x^{x_1} H_z(\tau,s)ds\,d\tau + \int_t^{t_1} H_{z_x}(\tau,x)d\tau,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
q(\mathrm{t}) &= -\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) \frac{\partial \varphi(a(T_1),\ldots,a(T_k))}{\partial a_k} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) \frac{\partial G(z(T_1,X_1),\ldots,z(T_k,X_k))}{\partial z_i} + \int_t^{t_1} M_a(\tau)d\tau - \\
&- \int_{x_0}^{x_1}\int_t^{t_1} H_z(\tau,x)dx\,d\tau + \int_{x_0}^{x_1} B'(t,x)\psi(t,x)dx,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

то формула приращения (3.19) примет вид

$$\begin{aligned}
\Delta \mathrm{I}(\mathrm{u}) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} \Delta a'(T_i) \frac{\partial^2 \varphi(a(T_1),\ldots,a(T_k))}{\partial a_i\,\partial a_j} \Delta a(T_j) - \\
&- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \Delta z'(T_i,X_i) \frac{\partial^2 G(z(T_1,X_1),\ldots,z(T_k,X_k))}{\partial z_i\,\partial z_j} \Delta z(T_j,X_j) - \int_{t_0}^{t_1} M'_u(t)\Delta u(t)dt - \\
&- \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta a'(t)M_{aa}(t)\Delta a(t) + 2\,\Delta u'(t)M_{ua}(t)\Delta a(t) + \Delta u'(t)M_{uu}(t)\Delta u(t)\right]dt - \\
&- \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x) + \Delta z'(t,x)H_{zz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x) + \Delta z'_x(t,x)H_{z_xz}(t,x)\Delta z(t,x) + \right. \\
&\left. + \Delta z'_x(t,x)H_{z_xz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x)\right]dx\,dt + o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\|\Delta a(T_i)\|\right]^2\right) + o_2\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|\right]^2\right) - \\
&- \int_{t_0}^{t_1} o_3\left(\left[\|\Delta a(t)\| + \|\Delta u(t)\|\right]^2\right)dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} o_4\left(\left[\|\Delta z(t,x)\| + \|\Delta z_x(t,x)\|\right]^2\right)dt\,dx.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Пусть $\varepsilon \in [0,1]$ произвольное число, а $v(t) \in U$, $t \in T$ произвольная измеримая и ограниченная r -мерная вектор-функция (допустимое управление).

В силу выпуклости области управления U специальное приращение управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_{\varepsilon}(t) = \varepsilon [v(t) - u(t)], \ t \in T . \tag{3.23}$$

Через $(\Delta a(t;\varepsilon), \Delta z(t,x;\varepsilon))$ обозначим специальное приращение вектора состояния $(a(t), z(t,x))$ отвечающее приращению (3.23) управления $u(t)$.

Используя оценки приведенные например в работах [1-4, 6, 7, 10, 11, 15] доказывается, что

$$\|\Delta a(t;\varepsilon)\| \le L\varepsilon , \tag{3.24}$$

$$\|\Delta z(t,x;\varepsilon)\| \le L\varepsilon , \quad \|\Delta z_x(t,x;\varepsilon)\| \le L\varepsilon , \quad (t,x) \in D ,$$

где $L = const > 0$ некоторое постоянное.

Используя эти оценки и (3.23) при помощи (3.2)-(3.3), (3.4)-(3.5) доказывается

Теорема 3.1. *Для* специального приращения $(\Delta a(t;\varepsilon), \Delta z(t,x;\varepsilon))$ состояния $(a(t), z(t,x))$ имеют место разложения

$$\begin{aligned} &\Delta a(t;\varepsilon) = \varepsilon \ell(t) + o(\varepsilon;t), \\ &\Delta z(t,x;\varepsilon) = \varepsilon m(t,x) + o(\varepsilon;t,x), \\ &\Delta z_x(t,x;\varepsilon) = \varepsilon m_x(t,x) + o(\varepsilon;t,x), \end{aligned} \tag{3.25}$$

где $(\ell(t), m(t,x))$ является решением аналога уравнения в вариациях

$$\dot{\ell}(t) = g_a(t)\ell(t) + g_u(t)(v(t) - u(t)), \tag{3.26}$$

$$\ell(t_0) = 0 , \tag{3.27}$$

$$m_{tx}(t,x) = B(t,x)m_t(t,x) + f_z(t,x)m(t,x) - f_{z_x}(t,x)m_x(t,x), \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} &m(t,x_0) = \ell(t), \\ &m(t_0,x) = 0 . \end{aligned} \tag{3.29}$$

С учетом разложений, (3.25) из формулы приращения (3.22), получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta \mathrm{I}_{\varepsilon}(\mathrm{u}) = \mathrm{I}(\mathrm{u} + \Delta \mathrm{u}_{\varepsilon}) - \mathrm{I}(\mathrm{u}) = -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} M_u'(t)(v(t) - u(t))dt + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2}\{\ell'(t_1)\varphi_{aa}(a(t_1))\ell(t_1) + m'(t_1,x_1)G_{zz}(z(t_1,x_1))m(t_1,x_1) - \\ - \int_{t_0}^{t_1}\Big[\ell'(t)M_{aa}(t)\ell(t) + 2(v(t) - u(t))' M_{ua}(t)\ell(t) + (v(t) - u(t))' M_{uu}(t)(v(t) - u(t))\Big]dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[m'(t,x)H_{zz}(t,x)m(t,x) + m'(t,x)H_{zz_x}(t,x)m_x(t,x) + m_x'(t,x)H_{z_xz}(t,x)m(t,x) + \\ + m_x'(t,x)H_{z_xz_x}(t,x)m_x(t,x)\Big]dx\,dt\Big\} + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{3.30}$$

4. Необходимые условия оптимальности. Из разложения (3.30) следует

Теорема 4.1. *Для* оптимальности допустимого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы *для* всех $v(t) \in U$, $t \in T$ выполнялось соотношение

$$\int_{t_0}^{t_1} M_u(t)\big(v(t)-u(t)\big)dt \le 0. \tag{3.31}$$

Необходимое условие оптимальности (3.31) есть аналог *линеаризованного* (дифференциального) (см. напр. [18, 19]) условия максимума *для* рассматриваемой задачи. Следуя работам [20, 21] можно доказать следующее утверждение.

Следствие 3.1. Необходимое условие оптимальности (3.31) имеет место тогда, только тогда когда *для* всех правильных точек (точек *Лебега*) (см. напр. [22-24]) *для* всех $w \in U$ выполняется неравенство

$$M_u'(\theta)\big(w-u(\theta)\big) \le 0. \tag{3.32}$$

Соотношение (3.32) есть аналог *линеаризованного* условия максимума и принадлежит *классу* необходимых условий оптимальности первого порядка и нередко вырождается (см. напр. [25, 26]). Такие *случаи* называются квазиособыми.

Определение 3.1. *Допустимое* управление $u(t)$ назовем квазиособым управлением в задаче (2.1)-(2.6), если *для* всех $w \in U$, $\theta \in [t_0, t_1)$

$$M_u'(\theta)\big(w-u(\theta)\big) = 0. \tag{3.33}$$

Из разложения (3.30) в *силу* (3.33) следует

Теорема 3.2. *Для* оптимальности квазиособого управления $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.6) необходимо, чтобы неравенство

$$\begin{aligned}
&\ell(t_1)\varphi_{aa}(a(t_1))\ell(t_1) - \int_{t_0}^{t_1}\Big[\ell'(t)M_{aa}(t)\ell(t) + 2\big(v(t)-u(t)\big)'M_{ua}(t)\ell(t) + \big(v(t)-u(t)\big)'M_{uu}(t)\big(v(t)-u(t)\big)\Big]dt + \\
&+ m'(t_1,x_1)G_{zz}\big(z(t_1,x_1)\big)m(t_1,x_1) - \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[m'(t,x)H_{zz}(t,x)m(t,x) + m'(t,x)H_{zz_x}(t,x)m(t,x) + \\
&\quad + m_x'(t,x)H_{z_xz}(t,x)m(t,x) + m_x'(t,x)H_{z_xz_x}(t,x)m_x(t,x)\Big]dx\,dt \ge 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

выполнялось *для* всех $v(t) \in U$, $t \in T$.

Неравенство (3.34) есть неявное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений. Используя его можно получить необходимые условия оптимальности квазиособых управлений непосредственно выраженные через параметры задачи (2.1)-(2.6).

Решение *линейного* неоднородного дифференциального уравнения (3.26) с начальным условием (3.27) допускает представление [17, 27]

$$\ell(t) = \int_{t_0}^{t_1} F(t,\tau)g_u(\tau)\big(v(\tau)-u(\tau)\big)d\tau, \tag{3.35}$$

где $F(t,\tau)$ $(n \times n)$ матричная функция являющаяся решением задачи

$F_\tau(t,\tau) = -F(t,\tau)g_a(\tau)$,

$F(t,t) = E$,

(E $(n \times n)$ – единичная матрица).

Используя результат работы [28] решение краевой задачи записывается в виде

$$m(t,x)=\int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,x_0)\left[\ell(\tau)-f_{z_x}(\tau,x_0)\ell(\tau)\right]d\tau, \tag{3.36}$$

где $R(t,x;\tau,s)$ $(n\times n)$ матричная функция решение интегрального уравнения.

$$R(t,x;\tau,s)=E+\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x} R(t,x;\alpha,\beta)\,f_z(\alpha,\beta)d\alpha\,d\beta+\int_{\tau}^{t} R(t,x;\alpha,s)\,f_{z_x}(\alpha,s)d\alpha+\int_{s}^{x} R(t,x;\tau,\beta)B(\tau,\beta)d\beta.$$

Из (3.36) с учетом (3.10) имеем

$$\begin{aligned} m(t,x)&=\int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,x_0)\left[g_a(\tau)\ell(\tau)+g_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau))-f_{z_x}(\tau,x_0)\ell(\tau)\right]d\tau=\\ &=\int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,x_0)g_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau))d\tau+\int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,x_0)\left[g_a(\tau)-f_{z_x}(\tau,x_0)\right]\ell(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Полагая

$$Q(t,x,\tau)=R(t,x;\tau,x_0)\left[g_a(\tau)-f_{z_x}(\tau,x_0)\right], \tag{3.38}$$

из (3.37) получим

$$m(t,x)=\int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,x_0)g_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau))d\tau+\int_{t_0}^{t} Q(t,x,\tau)\ell(\tau)d\tau.$$

А отсюда в силу представления (3.33) имеем

$$\begin{aligned} m(t,x)&=\int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,x_0)g_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau))d\tau+\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{\tau} Q(t,x,\tau)F(\tau,s)g_u(s)(v(s)-u(s))ds\right]d\tau=\\ &=\int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,x_0)g_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau))d\tau+\int_{t_0}^{t}\left[\int_{\tau}^{t} Q(t,x,s)F(s,\tau)ds\right]g_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau))d\tau. \end{aligned}$$

Полагая

$$L(t,x,\tau)=R(t,x;\tau,x_0)+\int_{\tau}^{t} Q(t,x,s)F(s,\tau)ds, \tag{3.39}$$

окончательно будем иметь

$$m(t,x)=\int_{t_0}^{t} L(t,x,\tau)g_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau))d\tau. \tag{3.40}$$

Следовательно

$$m_x(t,x)=\int_{t_0}^{t} L_x(t,x,\tau)g_u(\tau)(v(\tau)-u(\tau))d\tau. \tag{3.41}$$

Используя представления (3.35), (3.40), (3.41) займемся преобразованием отдельных слагаемых в (3.34).

При помощи представление (3.33) получим

$$\ell'(t_1)\varphi_{aa}(a(t_1))\ell(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(v(\tau)-u(\tau))'\,g_u'(\tau)F'(t_1,\tau)\varphi_{aa}(a(t_1))F(t_1,s)g_u(s)(v(s)-u(s))ds\,d\tau, \tag{3.42}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(v(t)-u(t)\right)' M_{ua}(t)\ell(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)M_{ua}(\tau)F(\tau,t)\,d\tau\right]g_u(t)\left(v(t)-u(t)\right)dt, \tag{3.43}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\ell'(t)M_{aa}(t)\ell(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t}F(t,\tau)g_u(\tau)\left(v(\tau)-u(\tau)\right)d\tau\right)' M_{aa}(t)\left(\int_{t_0}^{t}F(t,s)g_u(s)\left(v(s)-u(s)\right)ds\right)dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\left(v(\tau)-u(\tau)\right)' g_u'(\tau)\left\{\int_{max(\tau,s)}^{t_1}F'(t,\tau)M_{aa}(t)F(t,s)dt\right\}g_u(s)\left(v(s)-u(s)\right)ds\,d\tau, \tag{3.44}$$

Далее при помощи (3.40), (3.41) доказывается справедливость тождеств

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}m'(t,x)H_{zz}(t,x)m(t,x)dx\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_0}^{t}L(t,x,\tau)g_u(\tau)\left(v(\tau)-u(\tau)\right)d\tau\right)' H_{zz}(t,x)\times$$

$$\times\left(\int_{t_0}^{t}L(t,x,s)g_u(s)\left(v(s)-u(s)\right)ds\right)dx\,dt= \tag{3.45}$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(v(\tau)-u(\tau)\right)' g_u'(\tau)\left\{\int_{x_0}^{x_1}\int_{max(\tau,s)}^{t_1}L'(t,x,\tau)H_{zz}(t,x)L(t,x,s)dx\,dt\right\}g_u(s)\left(v(s)-u(s)\right)ds\,d\tau,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}m'(t,x)H_{zz_x}(t,x)m_x(t,x)dx\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_0}^{t}L(t,x,\tau)g_u(\tau)\left(v(\tau)-u(\tau)\right)d\tau\right)' H_{zz_x}(t,x)\times$$

$$\times\left(\int_{t_0}^{t}L_x(t,x,s)g_u(s)\left(v(s)-u(s)\right)ds\right)dx\,dt= \tag{3.46}$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(v(\tau)-u(\tau)\right)' g_u'(\tau)\left\{\int_{x_0}^{x_1}\int_{max(\tau,s)}^{t_1}L'(t,x,\tau)H_{zz_x}(t,x)L_x(t,x,s)dx\,dt\right\}g_u(s)\left(v(s)-u(s)\right)ds\,d\tau,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z_x'(t,x)H_{z_xz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x)dx\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_0}^{t_1}L_x(t,x,\tau)g_u(\tau)\left(v(\tau)-u(\tau)\right)d\tau\right)' H_{z_xz_x}(t,x)\times$$

$$\times\left(\int_{t_0}^{t_1}L_x(t,x,s)g_u(s)\left(v(s)-u(s)\right)ds\right)dx\,dt= \tag{3.47}$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(v(\tau)-u(\tau)\right)' g_u'(\tau)\left\{\int_{x_0}^{x_1}\int_{max(\tau,s)}^{t_1}L_x'(t,x,\tau)H_{z_xz_x}(t,x)L_x(t,x,s)dx\,dt\right\}g_u(s)\left(v(s)-u(s)\right)ds\,d\tau.$$

Введем обозначения

$$K(\tau,s)=-F'(t_1,\tau)\varphi_{aa}(a(t_1))F(t_1,s)+$$

$$+\int_{max(\tau,s)}^{t_1}\left[F'(t,\tau)M_{aa}(t)F(t,s)+\int_{x_0}^{x_1}\left[L'(t,x,\tau)H_{zz}(t,x)L(t,x,s)+L'(t,x,\tau)H_{zz_x}(t,x)L_x(t,x,s)+\right.\right. \tag{3.48}$$

$$\left.\left.+L_x'(t,x,\tau)H_{z_xz}(t,x)L(t,x,s)+L_x'(t,x,\tau)H_{z_xz_x}(t,x)L_x(t,x,s)\right]dx\right\}dt.$$

Матричная функция $K(\tau,s)$ является аналогом матричных функций введенные в рассмотрение в работах [15, 16, 29].

Учитывая обозначение (3.48) и тождества (3.42)-(3.47) неравенство (3.34) записывается в виде

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\left(v(\tau)-u(\tau)\right)' g_u'(\tau)K(\tau,s)g_u(s)\left(v(s)-u(s)\right)ds\,d\tau+ \tag{3.49}$$

$$+2\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t_1}\left(v(\tau)-u(\tau)\right)' M_{ua}(\tau)F(\tau,t)d\tau\right]g_u(t)\left(v(t)-u(t)\right)dt+\int_{t_0}^{t_1}\left(v(t)-u(t)\right)' M_{uu}(t)\left(v(t)-u(t)\right)dt\le 0.$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 3.3. *Для* оптимальности квазиособого управления $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.6), необходимо чтобы неравенство (3.49) выполнялось *для* всех $u(t) \in U$, $t \in T$.

Неравенство (3.49) есть интегральное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений и носит довольно общий характер. *И*з него можно получить, используя произвольность $v(t)$, ряд более *л*егко проверяемых условий оптимальности.

Непосредственным следствием теоремы 3.3. является

Теорема 3.4. При выполнении условий теоремы 3.3 *для* оптимальности квазиособых управлений $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.6) необходимо, чтобы *для* всех $\theta \in [t_0, t_1)$, $w \in U$ выполнялся неравенство

$$(w - u(\theta))' M_{uu}(\theta)(w - u(\theta)) \le 0. \tag{3.50}$$

Неравенство (3.48) есть аналог условия *Л*ежандра-Клебша в случае выпуклой области управления.

Теперь изучим случай вырождения аналога условия *Л*ежандра-Клебша.

Определение 3.2. Квазиособое управление $u(t)$ назовем квазиособым второго порядка управлением, если *для* всех $w \in U$, $\theta \in [t_0, t_1)$

$$(w - u(\theta))' M_{uu}(\theta)(w - u(\theta)) = 0. \tag{3.51}$$

Теорема 3.5. Если $u(t)$ квазиособое второго порядка управление, то *для* его оптимальности необходимо, чтобы

$$(w - u(\theta))' [g_u'(\theta) K(\theta, \theta) g_u(\theta) + H_{ux}(\theta) g_u(\theta)](w - u(\theta)) \le 0 \tag{3.52}$$

выполнялось *для* всех $w \in U$ и $\theta \in [t_0, t_1)$.

Неравенство (3.52) есть аналог условия Габасова-Кирилловой полученный в [30, 31] в случае обыкновенной *д*инамической системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. Необходимые условия оптимальности *для* систем с распределенными параметрами // Математический сборник. 1966, т. 69, № 3, с. 371-421.
2. Егоров А.И. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Изв. АН СССР. Сер. мМатем. 1965, т. 29, № 6, с. 1205-1260.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // В сб.: Оптимальные системы. Статистические методы. М. Наука. 1967, с. 76-92.
4. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы *л*инеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск. Изд-во Иркутского Университета. 1989, 160 с.
5. Васильев О.В. Качественные и конструктивные методы оптимизации систем с распределенными параметрами // Автореф. дисс. на соиск. ученой степени *д*-ра физ.-мат. наук. *Л*енинград. 1984, 42 с.
6. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М. Наука, 1981, 400с.
7. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск, Наука, 1990, 190 с.

8. Погодаев Н.И. О свойствах решений задачи Гурса-Дарбу с граничными и распределенными управлениями // Сиб. матем. журнал. 2007, № 5, с. 116-1123.
9. Погодаев Н.И. О решениях системы Гурса-Дарбу с распределенными граничными управлениями // Автореф. дисс. на соиск. ученой степени канд. физ. мат. наук. Иркутск. 2009, 18 с.
10. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами описываемых системами Гурса-Дарбу // Журн. Выч. Матем. и Матем. Физики. 1972, № 1, с. 61-72.
11. Плотников В.И., Сумин В.И. Проблемы устойчивости нелинейных систем Гурса-Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972, № 5, с. 845-856.
12. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления // Докл. АН Азерб. ССР. 1972, № 5, с. 12-16.
13. Меликов Т.К. Особые в классическом смысле управления в системах Гурса-Дарбу. Баку. Изд-во «ЭЛМ», 2003, 96 с.
14. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Принцип максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса-Дарбу // Вестн. Удмуртского ун-та. Матем. мех. компьют. наука. 2011, № 2, с. 52-57.
15. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку, Изд-во ЭЛМ, 2010, 360 с.
16. Мансимов К.Б. Исследование особых процессов в задачах оптимального управления // Автореф. дисс. на соиск. уч. степени д-ра физ.-мат. наук. Баку, 1994, 42 с.
17. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М. Наука, 1979, 550 с.
18. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск. Изд-во «Наука и техника», 1974, 272 с.
19. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. Л-д. Изд-во ЛГУ, 1968, 160 с.
20. Срочко В.А. Вычислительнве методы оптимального управления. Иркутск. Изд-во Иркутского Ун-та. 1982, 110 с.
21. Гирсанов И.В. Лекции по математической теории экстремальных задач. М. Изд-во МГУ. 1970, 118 с.
22. Мордухович Б.Ш. Метод матрических аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М. Наука, 1988.
23. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М. Наука, 1969.
24. Новоженов М.М., Сумин В.И., Сумин М.И. Методы оптимального управления системами математической физики. Горький. Изд-во ГГУ, 1986, 87 с.
25. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. Наука, 1973, 256 с.
26. Габасов Р., Кириллова Ф.М. и др. Методы оптимизации. Мн. Четыре четверти. 2011, 472 с.
27. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск. Изд-во БГУ, 1973, 256 с.
28. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. Об интегральном представлении решений некоторых дифференциальных уравнений // Изв АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1973, № 2
29. Мансимов К.Б. Об одной схеме исследования особых управлений в системах Гурса-Дарбу // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1981, № 2, с. 100-104.
30. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1970, № 4, с. 665-670.
31. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Об оптимальности особых управлений // Дифференц. уравнения. 1969, № 6, с. 1000-1011.

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2017. Volume 1, Number 2 *Pages 118-125*

UOT 517.947

О СПЕКТРЕ И РЕЗОЛЬВЕНТЕ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

Н.А. ГАДИРЛИ

Сумгаитский Государственный Университет

Сумгаит / АЗЕРБАЙДЖАН

nigar.gadirli@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В данной работе исследуется сепктр и резольвента операторно дифференциаль-ного уравнения высокого порядка на конечном отрезке.

При некоторых условиях на операторные коэффициенты спектрданного опера-тора является дискретными. Доказывается, что резольвента является оператором типа Гильберта-Шмидта. Доказывается сходимость ряда $\sum_{x_n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}$, где λ_n собственные значения данного оператора.

Ключевые слова: Гильбертово протсранство, оператор, операторно-диффе-ренциальное уравнение, функция Грина, собственные значения, собственные функции, спектр.

SONLU PARÇADA YÜKSƏK TƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN SPEKTRA VƏ REZOLVENTASI HAQQINDA

XÜLASƏ

Təqdim edilmiş məqalədə sonlu parçada operator əmsallı diferensial tənliklərin spektrivə rezolventası tədqiq edilir. Tənliyin əmsalları üzərinə qoyulmuş bəzi şərtlər daxilində tənliyin spektrının diskretolması göstərilir. İsbat edilmişdirki, baxılan operatorun rezolventasl Hilbert - Şmidttipli operatordur.

Açarsözlər: Hilbert fəzası, operator, operator-diferensial tənlik, Qrin funksiyası, məxsusi ədəd, məxsusi funksiya, spektr.

ON THE SPECTRUM AND REZOLVENT ON HIGHER ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION ON FINITE SEGMENT

ABSTRACT

In the present paper we study the spectrum and rezolvent of operator-differential equation higher order on finite segment. Proved a theorem that the resolvent of given operator is the Hilbert-Smidt type integral operator. To this end, it is shown that the series $\sum_{x_n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}$, composed of eigenvalues of the operator L, is convergent.

Keywords: Hilbert space, operator, operator-differential equation, Green function, eigenvalue, eigen function, spectrum.

Введение. Постановка задачи.

Пусть H -сепарабельное гильбертово пространство. Определим гильбертово пространство $H_1 = L_2[H;[0,\pi]]$, элементами которого являются функции $f(x)$ со значениями из H, для которых

$$\int_0^{\pi}\|f(x)\|_H^2 dx < \infty.$$

Скалярное произведение в H_1 определяется равенством:

$$[f,g]=\int_0^{\pi}(f(x),g(x))_H\,dx,\quad f,g\in H_1.$$

В настоящей работе рассматривается оператор L, порожденный выражением

$$l(y)=(-1)^n\left(P(x)u^{(n)}\right)^{(n)}+Q(x)y, \tag{1}$$

и граничными условиями

$$\begin{cases} y(0)=y'(0)=\ldots=y^{(n-1)}(0)=0 \\ y(\pi)=y'(\pi)=\ldots=y^{(n-1)}(\pi)=0 \end{cases} \tag{2}$$

где $y(x)\in H_1$, и производные понимаются в сильном смысле. Будем предполагать, что операторные коэффициенты $P(x)$ и $Q(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) Операторная функция $P(x)$ при $x\in[0,\pi]$ n-раз равномерно дифференцируема и для всех $h\in H$

$$m(h,h)_H\le(P(x)h,h)_H\le M(h,h),\ \ m,\ M>0.$$

2) Операторы $Q(x)$ для почти всех $x\in[0,\pi]$ самосопряжены в H, причем в H существует общее для всех x всюду плотное в H множество $D\{Q(x)\}=D(Q)$, на котором $Q(x)$ определены и самосопряжены, равномерно снизу ограничены единичным оператором, т.е. для всех $x\in[0,\pi]$ и $f\in D(Q)$ $(Q(x)f,f)_H>(f,f)_H$.

3) Существуют постоянные числа $A>0,\ 0<a<\dfrac{2n+1}{2n}$ такое, что при всех $x\in[0,\pi]$ и $|x-\xi|\le 1$ справедливо неравенство $\left\|[Q(x)-Q(\xi)]Q^{-a}(x)\right\|_H<A|x-\xi|$.

4) Для $|x-\xi|>1$ справедливо неравенство $\left\|K(\xi)\exp\left(-\dfrac{Jm\varepsilon_1}{2}|x-\xi|\omega\right)\right\|_H<C$, где

$$K(x)=P^{-\frac{1}{2}}(x)Q(x)P^{-\frac{1}{2}}(x),\quad \omega=\left\{K(x)+\mu P^{-1}(x)\right\}^{\frac{1}{2n}},\ \mu>0.$$

$$Jm\varepsilon_1=\min_i\left\{Jm\varepsilon_i>0,\ \varepsilon_i^{2n}=-1\right\}$$

5) Для всех $x,\xi\in[0,\pi]$ выполняются неравенства

$$\left\|Q(x)P^{\pm\frac{1}{2}}(x)Q^{-1}(x)\right\|_H<C,\quad \left\|Q(\xi)P^{\pm\frac{1}{2}}(\xi)Q^{-1}(\xi)\right\|_H<C.$$

6) Предположим, что $Q^{-1}(x)$ при всех $x\in[0,\pi]$ является вполне непрерывным оператором. Тогда оператор $K^{-1}(x)$ при всех $x\in[0,\pi]$ также является вполне непрерывным оператором. Пусть $\beta_1(x)\le\beta_2(x)\le\ldots\le\beta_n(x)\le\ldots$ собственные значения оператора $K(x)$ в порядке возрастания, относительно которых будем предполагать, что они измеримые функции. Предположим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^{\frac{1-4n}{2n}}(x)$ сходится при всех $x\in[0,\pi]$ и его сумма $F(x)\in L_1[0,\pi]$.

Из условий, наложенных на операторные функции $P(x)$ и $Q(x)$ следует, что спектр оператора L является дискретными. Пусть $\lambda_1,\lambda_2\ldots,\lambda_n\ldots$ являются собственными значениями оператора L в порядке их роста. Так как L-неограниченный оператор, поэтому при $n\to\infty,\ \lambda\to\infty$.

Основной целью данной статьи является доказательство теоремы о том, что резольвента оператора L является интегральным оператором типа Гильберта-Шмидта.

Для этой цели, следуя методу Карлемана-Титчмарта сперва усотановим некоторые тождество, связывающий собственные значения, собственные функции и функции Грина данного оператора.

2. Вывод вспомогательных тождеств.

Предположим, что операторная функция $U(\xi)$ на интервале $[0,\pi]$ имеет непрерыв-ную сильную $2n$-ную производную всюду, за исключением точки $\xi = x$, в которой

$$U^{(2n-1)}(x+0) - U^{(2n-1)}(x-0) = (-1)^n P^{-1}(x) \tag{3}$$

Пусть $V(\xi)$-операторная или векторнозначная функция в пространстве H, имеющая $2n$-ю непрерывную сильную производную. С помощью интегрирования по частям с использованием равенства (3) нетрудно вывести следующую формулу

$$\int_0^{\pi}\left[U(\xi)\left(P(\xi)V^{(n)}(\xi)\right)_{\xi}^{(n)} - \left(u^{(n)}(\xi)P(x)\right)_{\xi}^{(n)}V(\xi)\right]d\xi =$$

$$= \int_0^{x-0}\left[U(\xi)\left(P(\xi)V^{(n)}(\xi)\right)_{\xi}^{(n)} - \left(U^{(n)}(\xi)P(\xi)\right)_{\xi}^{(n)}V(\xi)\right]d\xi +$$

$$+ \int_{x+0}^{\pi}\left[U(\xi)\left(P(\xi)V^{(n)}(\xi)\right)_{\xi}^{(n)} - \left(U^{(n)}(\xi)P(\xi)\right)_{\xi}^{(n)}V(\xi)\right]d\xi =$$

$$= V(x) - \Big[U(\xi)\left(P(\xi)V^{(n)}(\xi)\right)^{(n-1)} - U^{1}(\xi)\left(P(\xi)V^{(n)}(\xi)\right)^{(n-2)} +$$

$$+ u^{11}(\xi)\left(P(\xi)V^{(n)}(\xi)\right)^{(n-3)} + \ldots + \left(U^{(n)}(\xi)P(\xi)\right)^{(n-1)}V(\xi)\Big]_{\xi=0}^{\xi=\pi} -$$

$$- \int_0^{\pi} u^{(n)}(\xi)\frac{\partial^n}{\partial\xi^n}\left[P(\xi) - P(x)\right]V(\xi)d\xi \tag{4}$$

Положим, при фиксированном x

$$u(\xi) = g(x,\xi,\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(P(x)S^{2n} + Q(x) + \mu E\right)^{-1}e^{is(x-\xi)}ds =$$

$$= \frac{1}{2ni}P^{-\frac{1}{2}}(x)\omega^{1-2n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k axp\left(i\varepsilon_k|x-\xi|\omega\right)P^{-\frac{1}{2}}(x),$$

где $\omega = \left\{P^{-\frac{1}{2}}(x)Q(x)P^{-\frac{1}{2}}(x) + \mu P^{-1}(x)\right\}^{\frac{1}{2n}}$, μ-большое положительное число.

Здесь ε_k-являются корнями из (-1) степени $2n$,лежащие в верхнейполуплоскости.

Далее, пусть $V(\xi) = \varphi_k(\xi)$, где $\varphi_k(\xi)$-собственная вектор-функция оператора L, соответствующая собственному значению λ_k,

$$(-1)^n\left(P(x)\varphi_k^{(n)}(x)\right)^{(n)} + Q(x)\varphi_k(x) = \lambda_k\varphi_k(x)$$

$$\varphi_k(0)=\varphi_k^1(0)=\ldots=\varphi_k^{(n-1)}(0)=0$$

$$\varphi_k(\pi)=\varphi_k^1(\pi)=\ldots=\varphi_k^{(n-1)}(\pi)=0.$$

Так как при $\xi\neq x$

$$(-1)^n\left(P(x)g^{(n)}(x,\xi,\mu)\right)_\xi^{(n)}+Q(\xi)g(x,\xi,\mu)+\mu g(x,\xi,\mu)=0,$$

а при $\xi=x$ выполняется условие (3), т.е.

$$g_\xi^{(2n-1)}(x,x+0,\mu)-g_\xi^{(2n-1)}(x,x-0,\mu)=(-1)^nP^{-1}(x),$$

то из тождества (4) следует

$$(-1)^n\int_0^\pi g(x,\xi,\mu)[\lambda_k+\mu+Q(x)-Q(\xi)]\varphi_k(\xi)d\xi=\varphi_k(x)+$$

$$+\Big[\ g(x,\xi,\mu)\left(P(\xi)\varphi_k^{(n)}(\xi)\right)^{(n-1)}+g_\xi^1(x,\xi,\mu)\left(P(\xi)\varphi_k^{(n)}(\xi)\right)^{(n-2)}+$$

$$+g_\xi^{11}(x,\xi,\mu)\left(P(\xi)\varphi_k^{(n)}(\xi)\right)^{(n-3)}-\ldots+\left(g_\xi^{(n)}(x,\xi,\mu)P(\xi)\right)^{(n-1)}\varphi_k(\xi)\ \Big]_{\xi=0}^{\xi=\pi}+$$

$$+\int_0^\pi g_\xi^{(2n)}(x,\xi,\mu)[P(\xi)-P(x)]\varphi_k(\xi)d\xi+$$

$$+\sum_{m=1}^n C_n^m\int_0^\pi g_\xi^{(2n-m)}(x,\xi,\mu)P^{(m)}(\xi)\varphi_k(\xi)d\xi=\varphi_k(x)+\Big[\ g(x,\pi,\mu)\left(P(\pi)\varphi_k^{(n)}(\pi)\right)^{(n-1)}-g_\xi^1(x,\pi,\mu)\left(P(\pi)\varphi_k^{(n)}(\pi)\right)^{(n-2)}+$$

$$+g_\xi^{11}(x,\pi,\mu)\left(P(\pi)\varphi_k^{(n)}(\pi)\right)^{(n-3)}+\ldots+(-1)^ng_\xi^{(n-1)}(x,\pi,\mu)\left(P(\pi)\varphi_k^{(n)}(\pi)\right)\Big]-\varphi_k^{(n)}(0)-$$

$$-\Big[\ g(x,0,\mu)\left(P(0)\varphi_k^{(n)}(0)\right)-g_5^1(x,0,\mu)\left(P(0)\varphi_k^{(n)}(0)\right)^{(n-2)}+$$

$$+g^{11}(x,0,\mu)\left(P(0)\varphi_k^{(n)}(0)\right)^{(n-3)}-\ldots+(-1)^ng_\xi^{(n-1)}(x,0,\mu)\left(P(0)\varphi_k^{(n)}(0)\right)\Big]+$$

$$+\int_0^\pi g_\xi^{(2n)}(x,\xi,\mu)[P(\xi)-P(x)]\varphi_k(\xi)d\xi+$$

$$+\sum_{m=1}^n C_n^m\int_0^\pi g_\xi^{(2n-m)}(x,\xi,\mu)P_{(\xi)}^{(m)}\varphi_k(\xi)d\xi=$$

$$=\varphi_k(x)+l_\pi(x,\mu)+l_0(x,\mu)+M(x,\mu)+N(x,\mu),$$

где

$$l_\pi(x,\mu)=\Big[g(x,\pi,\mu)\left(P(\pi)\varphi_k^{(n)}(\pi)\right)^{(n-1)}-g_\xi^1(x,\pi,\mu)\left(P(\pi)\varphi_k^{(n)}(0)\right)^{(n-2)}+$$

$$+g^{11}(x,\pi,\mu)\left(P(\pi)\varphi_k^{(n)}(\pi)\right)^{(n-3)}-\ldots+(-1)^ng_\xi^{(n-1)}(x,\pi,\mu)\left(P(\pi)\varphi_k^{(n)}(\pi)\right)\Big].$$

$$l_0(x,\mu)=\Big[g(x,0,\mu)\left(P(0)\varphi_k^{(n)}(0)\right)^{(n-1)}-g_\xi^1(x,0,\mu)\left(P(0)\varphi_k^{(n)}(0)\right)^{(n-2)}+$$

$$+g^{11}(x,0,\mu)\left(P(0)\varphi_k^{(n)}(0)\right)^{(n-1)}-\ldots+(-1)^ng_\xi^{(n-1)}(x,0,\mu)\left(P(\pi)\varphi_k^{(n)}(\pi)\right)\Big].$$

$$M(x,\mu)=\int_0^{\pi} g_{\xi}^{(2n)}(x,\xi,\mu)\left[P(\xi)-P(x)\right]\varphi_k(\xi)d\xi$$

$$N(x,\mu)=\sum_{m=1}^{n} C_n^m \int_0^{\pi} g_{\xi}^{(2n-m)}(x,\xi,\mu)P_{(\xi)}^{(m)}\varphi_k(\xi)d\xi.$$

Таким образом

$$(-1)^n\int_0^{\pi} g(x,\xi,\mu)\left[(\lambda_k+\mu)+\left(Q(\xi)-Q(x)\right)\right]\varphi_k(\xi)d\xi=$$

$$=\varphi_k(x)+l_n(x,\mu)+l_0(x,\mu)+M(x,\mu)+N(x,\mu).$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k+\mu}=(-1)^n\int_0^{\pi} g(x,\xi,\mu)\varphi_k(\xi)d\xi+\frac{1}{\lambda_k+\mu}\int_0^{\pi} g(x,\xi,\mu)\left[Q(\xi)-Q(x)\right]\varphi_k(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{l_{\pi}(x,\mu)}{\lambda_k+\mu}+\frac{l_0(x,\mu)}{\lambda_k+\mu}+\frac{M(x,\mu)}{\lambda_k+\mu}+\frac{N(x,\mu)}{\lambda_k+\mu}=$$

$$=a_k+b_k+c_k+d_k+m_k+n_k \quad (5)$$

здесь

$$a_k=(-1)\int_0^{\pi} g(x,\xi,\mu)\varphi_k(\xi)d\xi$$

$$b_k=\frac{1}{\lambda_k+\mu}\int_0^{\pi} g(x,\xi,\mu)\left[Q(\xi)-Q(x)\right]\varphi_k(\xi)d\xi$$

$$c_k=\frac{l_{\pi}(x,\mu)}{\lambda_k+\mu}$$

$$d_k=\frac{l_0(x,\mu)}{\lambda_k+\mu},\ m_k=\frac{M(x,\mu)}{\lambda_k+\mu},\ n_k=\frac{N(x,\mu)}{\lambda_k+\mu}.$$

В этих обозначениях окончательно получим

$$\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k+\mu}=a_k+b_k+c_k+d_k+m_k+n_k \quad (6)$$

Отметим, что $a_k, b_k, c_k, d_k, m_k, n_k$ при каждом фиксированном x суть векторы в пространстве H.

3. Доказательство основной теоремы.

Пользуясь равенством (6) доказывается следующая основная теорема.

Теорема: Если операторные коэффициенты $P(x)$ и $Q(x)$ удовлетворяют условиям 1)-6), то резольвента оператора L, порожденного выражением (1) и граничными условиями (2) является интегральным оператором типа Гильберта-Шмидта.

Доказательство: Для доказательство теоремы достаточно доказать, что при выполнении условий 1)-6) сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}$.

Из формулы (6) следует, что

$$\frac{\|\varphi_n(x)\|^2}{(\lambda_k+\mu)^2}=\|a_k+b_k+c_k+d_k+m_k+n_k\|_H^2.$$

Обозначим через N произвольное натуральное число и пусть

$$S_N(x)=\sum_{k=1}^{N}\frac{\|\varphi_n(x)\|_H^2}{(\lambda_k+\mu)^2}=\sum_{k=1}^{N}\|a_k+b_k+c_k+d_k+m_k+n_k\|_H^2 . \tag{7}$$

Так как $\varphi_k(x)$ -ортонормированные собственные вектор-функции задачи (1)-(2), соответствующие собственным значаниям λ_k, то интегрируя равенство (7) по x на отрезке $[0,\pi]$, получим

$$\int_0^{\pi}S_N(x)dx=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(\lambda_k+\mu)^2}. \tag{8}$$

Если принять во внимание элементарное неравенство

$$\|a_k+b_k+c_k+d_k+m_k+n_k\|_H^2\le$$

$$\le 6\left(\|a_k\|_H^2+\|a_k\|_H^2+\|b_k\|_H^2+\|c_k\|_H^2+\|d_k\|_H^2+\|m_k\|_H^2+\|n_k\|_H^2\right),$$

то из (7) и (8) получаем:

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(\lambda_k+\mu)^2}\le$$

$$\le 6\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\|a_k\|_H^2+\|a_k\|_H^2+\|b_k\|_H^2+\|c_k\|_H^2+\|d_k\|_H^2+\|m_k\|_H^2+\|n_k\|_H^2\right)dx \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(\lambda_k+\mu)^2}\le$$

$$\le 6\left[\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{N}\|a_k\|_H^2\right)dx+\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{N}\|b_k\|_H^2\right)dx+\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{N}\|c_k\|_H^2\right)dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{N}\|d_k\|_H^2\right)dx+\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{N}\|m_k\|_H^2\right)dx+\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{N}\|n_k\|_H^2\right)dx.\right. \tag{10}$$

Сначала оценим величину

$$\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{N}\|a_k\|_H^2\right)dx.$$

Из неравенства Бесселя следует, что

$$\sum_{k=1}^{N}\|a_k\|_H^2\le\int_0^{\pi}\sum_{i,j=1}^{\infty}g_{ij}^2(x,\xi,\mu)d\xi, \tag{11}$$

где $g_{ij}(x,\xi,\mu)$ матричные элементы оператора $g(x,\xi,\mu)$ в произвольном базисе в H.

Так как

$$g(x,\xi,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[P(x)S^{2n}+Q(x)+\mu E\right]^{-1}\exp\{is(x-\xi)\}ds,$$

то

$$g_{ij}(x,\xi,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left[P(x)S^{2n}+Q(x)+\mu E\right]^{-1}e_i,e_j\right)\exp\{is(x-\xi)\}ds,$$

где $\{e_i\}$ произвольный базис в пространстве H .

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty}g_{ij}^2(x,\xi,\mu)d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(\left[P(x)S^{2n}+Q(x)+\mu E\right]^{-1}e_i,e_j\right)\right|^2ds,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{\infty}g_{ij}^2(x,\xi,\mu)d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{\infty}\left|\left[P(x)S^{2n}+Q(x)+\mu E\right]^{-1}e_i,e_j\right|^2ds,$$

С другой стороны сумма ряда $\sum_{i,j=1}^{\infty}\left|\left(\left[P(x)S^{2n}+Q(x)+\mu E\right]^{-1}e_i,e_j\right)\right|^2ds$ не зависит от базиса и поэтому , если за базис пространства H взять полный набор собственных функций оператора $P(x)S^{2n}+Q(x)$, то получим

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}\left|\left(\left[P(x)S^{2n}+Q(x)+\mu E\right]^{-1}e_i,e_j\right)\right|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\beta_i(x,s)+\mu\right]^{-2},$$

где $\beta_i(x,s)\quad(i=1,2,...)$ собственные значения оператора $P(x)S^{2n}+Q(x)$ в порядке роста.

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{\infty}g_{ij}^2(x,\xi,\mu)d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i}^{\infty}\left(\beta_i(x,s)+\mu\right)^{-2}ds. \tag{12}$$

Учитыва полученное равенство в неравенство (11), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{N}\|a_k\|_H^2\le\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\beta_i(x,s)+\mu\right)^{-2}ds. \tag{13}$$

Отсюда, интегрируя по x на отрезке $[0,\pi]$, получим

$$\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{N}\|a_k\|_H^2\right)dx\le\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\beta_i(x,s)+\mu\right)^{-2}dsdx. \tag{14}$$

Отметим, что ограниченность правой части (14) следует из условия 6).

Условия 1)-6) позволяет оценить при $\mu\to\infty$ все члены в правой части неравенстве (10).

В результате получаем:

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(\lambda_k+\mu)^2}\le\sum_{i=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dxds}{\{\beta_i(x,s)+\mu\}^2}+\tau(\mu)\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(\lambda_k+\mu)^2}. \tag{15}$$

Пологая $N\to\infty$ в равенстве (8) получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_k+\mu)^2}=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dxds}{\{\beta_i(x,s)+\mu\}^2}+0\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_k+\mu)^2}\right). \tag{16}$$

Отсюда следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_k+\mu)^2}$. Таким образом, мы доказали, что резольвента оператора L является интегральным оператором типа Гильберта-Шмидта. Теоерма доказана.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Г.И. Асланову за постоянную помощь и внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдукадыров Э. Асимптотическое распределение собственных значений операторной задачи Штурма Лиувиля. Доклады АН Узб.ССР, 1970, №12, стр. 2-5.
2. Абудов А.А., Асланов Г. И. Рспределение собственных значений операторно-дифференциальных уравненеий порядка 2п. Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, 1980, №1, стр. 9-14.
3. Асланов Г.И. Асимптотика числа собственных значений обыкновенных дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами на полуоси. Докл. АН Азерб. ССР, 1976, т. 32, №3, стр. 3-7.
4. Aslanova N.M. On the asimptotics of the distribution function of spectrum on one class singular differential operators. Transactions of NAS of Azerbaijan,vol. 18, №3-4, 1998, pp. 3-6.
5. Aslanov G.I., Kasumova G.I. On the resolvent of Strum-Liouville operator-differential equation on the finit-seqment. Mathematical Analysis, Differential equations and Applications, Bulqaria, Bulqaria, pp. 101-108.
6. Асланов Г.И., Н.С. Абдуллаева. О резольвенте операторного уравнения высокого порядка на конечном отрезке. LDU-nun Elmi Xəbərləri, Təbiət Elmləri, №2, Lənkəran-2017, стр. 53-63.
7. Байрамоглы М. Асимптотика числа собственных значений обыкновенных дифференциальных операторов с операторными коэффициентами. В сб. «Функциональный анализ и его применение», Баку, «Элм», 1971, стр. 144-166.
8. Бойматов К.Х. Асимптотика спектра операторного дифференциального уравнениф. Успехи матем. наук. 1973, т. 28, вып. 5, стр. 205-208.
9. Костюченко А.Г., Левитан Б.М. Об асимптотическом поведении собственных значений операторной задачи Штурма-Лиувилля. Функц. анализ и его прил. 1967, т.1, №1, стр. 86-96.
10. Левитан Б.М. Исследование функции Гринь уравнения Штурма-Лиувилля с операторным коэффициентом. Матем. сб. 1968, т.76, 118, №2, стр. 239-270.
11. Отельбаев М. К методу Титгмарша оценки резольвенты. ДАН СССР, 1973, т.211, №4, стр. 1021-1024.

2017. Volume 1, Number 2 *Pages 126-139*

UOT: 025.4.03

VEB SERVERLƏRDƏ NÖVBƏLİLİK MODELLƏRİNİN VƏ ARTIQ YÜKLƏNMƏ PROBLEMİNİN HƏLLİ YOLLARININTƏHLİLİ

Cavid MİSİRLİ

camisirli@beu.edu.az

Bakı Mühəndislik Universiteti

Bakı / AZƏRBAYCAN

Babək ABBASOV

babbasov@beu.edu.az

BMU, Bakı Mühəndislik Universiteti

Xırdalan / AZƏRBAYCAN

XÜLASƏ

Son illərdə veb texnologiyasının İT sahəsində sürətli inkişafı bu texnologiyanın gündəlik iş dünyasının vacib hissəsinə çevrilmişdir. Veb serverlərin optimal istifadəsi daha yaxşı növbəlilik modellərini olmasını tələb edir. Veb serverə çoxlu sayda sorğuların gəlməsi ilə artıq yüklənmə problemləri yaranır. Yüklənmənin balanslaşdırılması üzrə mövcud modellər yenə də özünü tam şəkildə yaxşı tərəfdən göstərə bilməmişdir.

Bu məqalədə veb serverlərdə mövcud növəlilik modellərinin müasir vəziyyəti və artıq yüklənmə kimi problemlər araşdırılmış və inkişaf prespektivləri öyrənilmişdir. Nəticə kimi ən yaxşı performans göstərən alqoritmlər araşdırılaraq və analiz edilərək tədqiq olunmuşdur.

Açar Sözlər: Veb serverlər, virtual maşınlar, yüklənmənin balanslaşdırılması, artıq yüklənmə.

ANALYSIS OF QUEUEING MODELS AND OVERLOADING PROBLEMS ON WEB SERVERS

ABSTRACT

Rapid developments in recent years around the world have altered the structure of states and states have directed from their classical structure to the new structure which procedures are done more rapidly, easily and less costly. That structure is e-government structure known as Electronic Government.

In this paper, given the contemporary state of queueing models and overloading problems have been investigated and its development prospects have been explored. This paper also presents the best algorithms which performs the best results.

Keywords: Web servers, virtual machines, load balancing, overloading.

АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ОЧЕРЕДЕЙ И ПРОБЛЕМ С ПЕРЕГРУЗКОЙ НА ВЕБ-СЕРВЕРАХ

АННОТАЦИЯ

Быстрое развитие событий в последние годы во всем мире изменило структуру государств и государств, направленных от классической структуры к новой структуре, процедуры которой выполняются быстрее, легко и дешевле. Эта структура является структурой электронного правительства, известной как Электронное правительство.

В этой статье, учитывая современное состояние моделей очередей и проблемы перегрузки, были исследованы и изучены перспективы его развития. В этой статье также представлены лучшие алгоритмы, которые обеспечивают наилучшие результаты.

Ключевые слова: веб-серверы, виртуальные машины, балансировка нагрузки, перегрузка.

GİRİŞ

Son illərin statistikası onu göstərir ki, veb trafikdə nəzərə çarpan dərəcədə inkişaf vardır. Bugünki dünyanı internetsiz təsəvvür etmək olmur. İnternetin burada rolu əsas etibarı ilə veb

serverin fəaliyyəti ilə bağlıdır. İnsanların hədsiz istifadəsi nəticəsində veb serverdə müəyyən yüklənmələr yaranır. Əsas qeyd olunmalı hissə isə veb səhifələrə fasiləsiz olaraq daxil olan sorğulardır. Veb server administratorları sistemin cavab zamanını stabil saxlamaq üçün çox vaxt eyni anda açıq əlaqələri məhdudlaşdırırlar. Sorğu sayı limiti keçəndə, sonra daxil olmaq istəyən bütün istifadəçilərə server tərəfindən inkar cavabı gəlir.

Veb server istifadəçilərinin internetdəki veb səhifələrə və digər verilənlərə daxil olmasına imkan yaradan xüsusi proqramlar ilə təmin olunmuş kompüterdir. Veb server informasiyaların saxlanılmasını, təşkilini və göndərilməsini təmin edir. Veb server veb brauzerdən qəbul etdiyi sorğu əsasında soruşulan sənədin elektron surətini istifadəçiyə göndərir. Belə sorğuların emal edilməsi və yerinə yetirilmə ardıcıllığı HTTPprotokolu vasitəsilə yerinə yetirilir. Sənəd yüklənən zaman server həmin sənədin hər bir hissəsi ilə ayrı-ayrılıqda birləşmə yaradır. Bu da veb serverin eyni vaxtda yüzlərləbrauzerdən sorğu qəbul etməsinə imkan verir. Veb serverin əsas funksiyalarından biri sistemin təhlükəsizliyini təmin etməkdir. Veb server ona daxil olan əvvəlki sorğular haqqında heç bir informasiya saxlamır.

Server sistemləri əsaslı şəbəkədə istifadəçi informasiya xidmətləri infrastrukturun ayrılmaz tərkib hisssəsinə çevrilib. Şəbəkə serverə qoşulan hər bir fərdi əlaqənin performans zamanın idarə edilməsi nəzəri olaraq praktikada tətbiqi çətinlik yaradır. Son vaxtlar veb saytlar hər gün milyonlarla sorğular qəbul edir və nəticədə serverin tutumu buna tab gətirməyəndə həddindən artıq yüklənmə halı baş verir.

Veb server üçün müəyyən yüklənmə limiti təyin olunur. Çünki server yalnız məhdud sayda olan müştəri əlaqələrini hər bir İP adres üzrə idarə edəbilir və yalnız hər saniyə üzrə gələn müəyyən edilmiş maksimum sayda sorğulara xidmət edir. Burada hər saniyəyə düşən sorğular aşağıdakılardan asılıdır:

- öz sazlamalarından,
- HTTP sorğu tipindən,
- Məzmunun statik və ya dinamik olmasından,
- Veb server istifadə edən əməliyyat sisteminin tətbiqi və texniki təminatı üzrə məhdudiyyətindən.

Veb server limiti keçdikdə, o heç bir xidmətə cavab verməyən halan gəlir.

Artıq yüklənməyə səbəb olma halları bunlar ola bilər:

- Veb trafikin artıq olması. Qısa zaman intervalında min hətta milyonlarla istifadəçinin veb sayta qoşulması. Məs, Sləşdot effekti;
- DoS hücumların təsiri ilə server öz resurlarını müştərilər üçün xidmət verməyə imkan vermir;
- İnternetin (şəbəkə) yavaşlaması nəticəsində müştəri sorğuları daha aşağı sürətlə ünvana çatır və nəticədə gözləmə müddəti artır. Bəzən yolda itkilər baş verir;
- Veb serverdə müəyyən yenidən qurma işləri görülən zaman sistem sorğulara cavab verə bilmir və nəticədə yüksək həcmdə trafik yaranır və artıq yüklənmə halı baş verir.

Veb serverdə artıq yüklənmə əlamətləri bunlar ola bilər: 1) Xidmətdə olan sorğuların gecikməsi 2) Veb server HTTP xəta kodu qaytardıqda (500, 404, 502 və s.) 3) Hərhansı məzmunu göndərməzdən əvvəl veb serverin TCP əlaqəsindən imtina etməsi

Son zamanlar internet istifadəçilərinin artması ilə veb serverlərə düşən yük həddindən artıq artmaqdadır. Xüsusən electron ticarət tacirləri və təminatçıları veb səhifələrə gələn çoxlu

sayda sorğuların veb serverlərdə artıq yüklənləmələri səbəbindən xidmət keyfiyyəti əhəmiyyətli dərəcədə azalmışdır. Cavab vaxtını qəbul ediləbilən limit çərçivəsində saxlamaq üçün, veb server administratorları tez-tez açıq əlaqələrə məhdudiyyətlər qoyurlar. Nəticədə ya gözləmə müddəti yüksək olur, ya da istifadəçi sorğusu ümumilikdə icra olunmur.

I. Cari vəziyyət

Halhazırda yüksk tutumlu veb serverlərin mövcud olmasına baxmayaraq, veb serverdə həddindən artıq yükləmələrin qarşısını almaq kimi tədbirlərin görülməsi tam olaraq öz həllini tapmamışdır. Bunun nəticəsində istifadəçinin sorğuları uğursuzluqla nəticələnir və xidmətin mümkünsüzlüyü haqqında mesajlar qəbul edir. Əlavə olaraq, istifadəçilərə yenidən cəhd eləmək kimi geri dönüş mesajlarının gəlməməsi müştəri məmnuniyyətinin aşağı səviyyəyə düşməsinə səbəb olur.

Veb serverlərin həddən artıq yüklənməsi səbəbindən ver saytlar dağılmış vəziyyətə düşür. Buna missal olaraq, sərnişinlərin avia-bileti internet üzərdindən etməsi zamanı təxminən 1 milyondan çox sərnişin sayta giriş edib müəyyən tranzaksiyalar edirlər. Nəticə etibarı ilə serverdə yüklənmələr yaranır. Trafikin düzləndirilməsi və veb server idarəolunmasına nəzarətlə bağlı bir neçə həll yolu tapılsa da, istifadəçi sorğularının serverə çatmasında yenə da problemlər qalmaqdadır.

Növbəlilik böyük həcmli və yüksək paylanmış tətbiqetmələrdə geniş istifadə edilməkdədir. İT sənayesində bulud texnologiyasının istifadəsində əməliyyat və insan xərclərinin azaldılması böyük rol oynayır. Bir sıra xidmət təminatçıları halhazırda ictimai növbələşmə əməliyyatından istifadə edir. Bunlara Amazon SQS, Windows Azure Queue daxildir. Bu şirkətlər elə bir xidmət təmin edir ki. Burada mümkün mesaj itkisi, dublikasiya və çatdırılma sırasının bitməsi kimi bəzi problemlərin qarşısını alır. Bu həll müəyyən vəziyyətlərdə özünü doğruldur.

Şirkətlərin bu problemin həlli üçün istifadə etdikləri vasitə son zamanlar bulud mühitində müəyyən çətinliklər yaratmaqdadır. Məsələn, sosial media paylaşım proqramını təsəvvür edək. Burada hər an yüksək həcmli video və şəkillər yüklənir. Bu zaman çətinlik aradan qaldırmaq olur. Lakin hərhansı məşhur şəxs yayım edərkən proqrama daxil olan istifadəçilərin sayının artması nəticəsində yüklənmə pik nöqtəyə çatır. Bu zaman növbəlilik aşağı səviyyəyə düşür. Nəticədə, uzun gecikmələr baş verir. Bu halda növbəliklik prinsipinin tətbiqi ilə çatdırılan mesajların sayını nizamlamaq və müştəri məmnuniyyətini sabit saxlamaq mümkündür. Təbii ki, bu mövzuda bir çox elmi araşdırmalar aparılmaqdadır.

Bundan əlavə bu cür problem günümdə 21-ci əsrin uğuru kimi adlandırılan bulud texnologiyasında da özünü göstərməkdədir. Bulud texnologiyasının inkişafı virtuallaşdırma, şəbəkə, SaaS, paylanmış və grid texnologiyalarında bəzi çatışmazlıqlar üzərində araşdırmaların aparılmasına gətirib çıxardı. Bu xidmətin istifadəçiləri hər gün artmaqdadır. Xidmət təminatçıları isə istifadəçilərə daha keyfiyyətli və sürətli məlumat mübadiləsini təmin etmək məqsədi ilə yarana biləcək hərhansı problemi həll etməyə cəhd edir. Bulud mühitində istifadəçilərin say çoxluğu nəticəsində xidmət təminatçıları onların tələblərini ölçəkdə çətinlik çəkirlər. Çoxlu növbələşmə modelində (multi queueing model) daha uyğun resursların seçilməsində iş planlaşdırma (job scheduling) alqoritminin köməkliyi ilə bu problemləri aradan qaldırmaqdadır.

Hazırda bunu həll edən bəzi modellər mövcuddur. Məsələn, First Come First Serve, Shortest Job First, EASY, Combinational Backfill. Bulud texnologiyası hesablama modellərinə əsaslanaraq paylanılır və bunun nəticəsində istifadəçi mərkəzi idarəetmə mənbələrinin köməkliyi ilə enerjiyə qənaət etmiş olur.

Bulud texnologiyasının elə bir xidmət təklif edir ki, istifadəçi sadəcə internetdən istifadə edərək paylanmış məlumatı qısa zaman içərisində əldə edə bilər. Uzaq məsafələrdə yerləşən serverlədəki məlumatı və proqramlara girişi üçün veb brauzerlərdən istifadə edərək daxil olmaq imkanına sahibdir. Bunu isə xidmətin təminatçıları internet üzərindən proqram vasitəsilə təqdim edir. Xidmət təminatçılarına düşən əsas iş müştərilərə "istifadə etdiyin qədər ödə" prinsipinə uyğun olaraq daha etibarlı verilənlərin təminatı üçün dinamiki resurs yerləməsini təmin etməkdir. Burada onların bütün ehtiyaclarını uyğun formada çatdıraraq müştəri məmnuniyətini qazanmaqdır.

Bu mövzuyla bağlı bir sıra işlər aparılmışdır. Mümkün həllər heuristik istifadə əsaslı olub SLA (xidmət səviyyəsinin razılaşdırılması) yanaşmasına uyğun aparılır. Tipik olaraq buluda sorğu gedəndə o bir neçə hissələrə bölünür. Zaman itkisini azaltmaq üçün paralel proseslərdən istifadə edilir. Bu prosesləri adətən 2 hissəyə bölürlər. 1) statik mərhələ - virtual maşınların qruplar halında kompyuterlərə yerləşdirilərək siniflərə bölünməsi 2) dinamik resurs yerləşməsinin aparılmsı Yəni virtual maşınları iş axınının dəyişməsinə uyğun miqrasiya edilməsinin mümkünlüyü. Bütün bunlara baxmayaraq növbənin gözlənməsi üçün hələ də bir sıra alqoritmlərin inkişaf etdirilməsi üzərində araşdırmalar aparılmaqdadır.

II. Ədəbiyyat icmalı

2.1. Ümumi analiz

Veb server mühitində iş yükünün artması səbəbi ilə əlaqədar olaraq bu sahədə elmi araşdırmalar böyük vüsət almışdır. 21-ci əsrin yeni nəaliyyətlərindən olan internetin inkişafı bu sahədə çalışan alimlərin istər riyazi, istərsə də texniki tərəfdən mövcud metodlar üzərində yeni metod və modelləri təklif etməsi ilə çoxlu sayda məqalələr dərc edilmişdir.

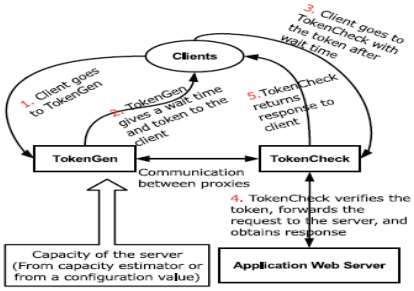
Veb serverin klasterində yüklənmənin balanslaşdırılması ilə bağlı olaraq **Luis Aversa və Azer Bestavros [1]** şəbəkədə gözləmə mövqeyində olan paketlərin yenidən serverə yönləndirilməsi üçün yeni prototip üzərində elmi araşdıma etmişlər. Onların bildirdiyinə görə mərkəzləşdirilmiş qovşaq sistemlərində sorğuların veb server daxilində hər bir hosta göndərilməsi artıq yüklənmə zamanı çox ləngiyir və hətta bəzən icra edilmir. Nəticədə gözləmədə olan paketlərin arada itkisi və ya yenidən göndərilməsi kimi problemlər ortaya çıxır. Tədqiqatçının əsas məqsədi düzgün üsul seçməklə hər bir hostun özündə digər qalan hostlar haqqında informasiya toplamaq və klaster hostları arasında dövri multikast istifadə etməklə yüklənmə haqqında informasiya paylamaqdır. Hədsiz yüklənmə zamanı TCP əlaqələrinin (paylanmış paketin) yenidən göndərilməsini təmin etməklə, veb server mühitində yüklənmənin balanslaşdırılmasını təmin etməkdir.

Təklif olunan prototip aşağı yüklənmiş "paylanmış paketin yenidən yazılması" üsulu TCP əlaqələrinin yenidən yönləndirilməsinə xidmət edir. Klaster daxilində hər bir maşın özündə bütün digər maşınların yenilənmiş siyahısını saxlayır. Bu informasiyada onların İP ünvanları və cari yüklənmə qeyd olunur. Hostlar növbə ilə öz yüklərini digər maşınlara elan edirlər. Bu informasiya server tərəfindən gələn sorğunun yenidən marşrutlaşdırılmasına ehtiyacın olub-olmamasını və ya lokal olaraq xidmətə çıxarılmasını təyin edir. Eyni zamanda, hər bir maşın özündə yenidən yönləndirilmiş əlaqələr haqqında informasiya saxlayır.DPR paylanmış serverdə heç bir mərkəzləşdirilmiş resurs istifadə etmədən marşrutlama əlaqələrinə imkan verir. Əlaqələri marşrutlamaq üçün fərqli qovşaq istifadə etmək əvəzinə, DPR paylanmış sistemin bütün hostlarını əlaqə marşrutlamada daxil edir. Üstünlükləri odur ki, marşrutlamanın gücü-

nün ölçüsü sistemdə qovşaqların sayı ilə ölçülür və bir qovşağın sıradan çıxması ilə sistemdə tamamilə xəta baş vermir. DPR-in həmçinin kiçik ölçülü sistmelər üçün xüsusi dəyəri vardır. Mərkəzləşdirilmiş sistemlərdə, 2 əlavə host da alınmalıdır ki, xəta baş verəndə işə düşsün. Əlavə cihazın qoşulmasına rəğmən əlaqə marşrutlayıcının tutumu əksər hallarda istifadəsiz qalır. Lakin, DPR paylanmış serverlərin iqtisadi cəhətdən daha faydalı ölçülməsinə imkan yaradır.

Bhavin Doshi, Chandan Kumar, Pulkit Piyush və Mythili Vutukuru[2]WebQ adlı struktur modelini təklif etməkdə məqsədləri odur ki, veb serverlər pik zamanlarda həddən artıq yüklənir və milyonlarla sorğunun əksəriyyəti ünvanan çatmamış qalır. Burada müştəri məmnuniyyəti kəskin dərəcədə azalır və xidməti keyfiyyəti aşağı düşmüş olur. Bu problemlə qarşılaşmış istifadəçiyə heç bir geri dönüş mesajı gəlmir. Sorğu itkisi yaranır. Onların əsas məqsədi növbələlik prinsipindən yararlanaraq müəyyən zaman aralığında sorğuları gözlətmək və server boş olan kimi həmin sorğunu yönləndirməkdir. Eyni zamanda serverin həddindən artıq yüklənməsinin qarşısını almaqdır.

Şəkil 1. WebQ arxitekturası



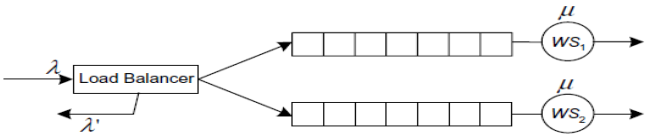
WebQ modeli hər sorğunun artıq yüklənmə zamanı itməməsini təmin edir. Həll yolu kimi 2 ön tərəfdə işləyən veb proksilərdən istifadə olunur. 1) TokenGen və 2)Token Check. Bunlar birlikdə serverin tutumuna görə gələn yükü uyğunlaşdırırlar. Vebserverə yeni sorğular gələndə, ilk olaraq TokenGen-ə çatır. Bu proksi hər bir sorğu üçün gözləmə vaxtını hesablayır. TokenGen hər bir sorğuya HTTP vasitəsiylə "vaxt bitəndən sonra yönləndirmə" cavabını göndərir. Burada istifadəçi veb sayta gözləmə vaxtından sonra yönləndirilir. TokenCheck isə daxili veb proksidir. Gələn sorğuları başa düşür və veb serverə yönləndirir. TokenGen həmçinin kriptoqrafik simvol yaradır. Bu simvol TokenCheck tərəfindən öncədən yoxlanılır ki, həqiqətən də həmin istifadəçi öz təyin olunmuş vaxtında gözləyib ya yox. Bu iki proksilər birlikdə veb serverlərin artıq yüklənmələri zamanı veb sorğuların "virtual növbələşmə"sini həyata keçirir.

Əvvəlki metodlar yalnız stasionar və müntəzəm hallara tətbiq oluna bilirdi. Bundan əlavə, orta xidmət və çatma sürəti sabit və dəyişməz zaman ilə təxmin edilir. Lakin, dünyada vəziyyəti qiymətləndiricidə (state estmator) elə çox hallar var ki, ən az bir saniyədə parametri dəyişən CPU məhdudlaşdırıcı hesablama sistemlərinə tətbiq edilə bilir. Bir sözlə, bundan öncəki metodlardan heç biri çox mərhələli qabaqlayıcı təxmini (multi-step ahead prediction) təsdəkləmirdi. Bu səbədən **Payam Amani, Maria Kihl, Anders Robertsson [3]** elə bir təxmin edici (predictor) təklif etdilər ki, yüksək dəqiqliklə aşağı və yuxarı yüklənmə halları altında öncədən təyin edilən çox mərhələlərdə tək serverli növbələşmə sisteminin cavab zamanını təxmin edə bilsin. Növbəli tək server üçün təklif olunmuş NARX əsaslı çox mərhələli cavab zamanını öncədən təxmin edən müxtəlif şərtlər daxilində simulyasiya mühitində özünü müsbət tərəfdən göstərmişdir. Statik mühitdən fərqli olaraq, qeyri stasionar halında sistemin cavab zamanını təyin etmə performansı yaxşı tərəfdən özünü göstərmişdir.

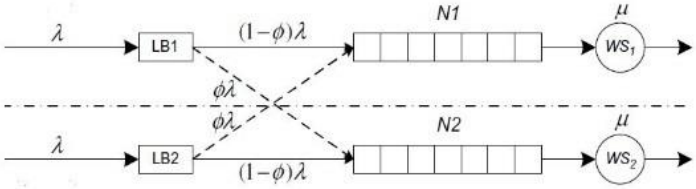
Parijat Dube və Rahul Jain [4] vebxidmətdən istifadə zamanı gözləməmə müddətinin azalması, müştəri məmnuniyyətinin qorunub saxlanması və ən əsası gözləmə zamanı əlavə pul ödəməmək üçün çox sinifli növbəlilik modellərinin cəlb edilməsi ilə vahid struktur modeli təklif etmişlər. Bu model çox sinifli növbəlilik üzərində qurulmuşdur. Hər hansı əməliyyatı icra edəcək istifadəçilərin ən optimal və xərcləri ən aşağı olan ehtimallı yolu seçməsi prosesi aşağıda göstərilmişdir. Rəqabətcil mühitdə çoxlu sayda təminatçılar öz istifadəçiləri üçün normal iş mühiti yaratmağa imkan verir. Hansı ki, bu növbədə olan istifadəçi üçün paralel multi sinif növbələrindən istifadə edilir bu da həmin istifadəçilərin məmnuniyyətini saxlamağa və növbədə gözləməyə görə əlavə pul ödəməmə halı yaranır.

Zhongju Zhang və Weiguo Fan[5]elmi məqaləsində **v**eb server və veb səhifə arasında həddindən artıq yüklənmə nəticəsində istifadəçi sorğular yolda yarımçıq qalması, itkinin yaranması və burada istifadə olunan modellərin hazırki tələbatı ödəməkdə qarşılaşdığı çətinlikləri qeyd etmişdir. Onların əsas tədqiqatları paylanmış və mərkəzləşdirilmiş yükləmə balanslaşdırılması modelləri üzərində olmuşdur.

Şəkil2. Mərkəzləşdirilmiş yük balanslaşdırma modeli



Şəkil 3. Paylanmış yük balanslaşdırma modeli



Tədqiqat Mərkəzləşdirilmiş və paylanmış yükləmə balanslaşdırma modelinin 2 eyni serverlərdə tətbiqi üzrə aparılmışdır. Nəticələrə əsasən, mərkəzləşdirilmiş modeldə trafikin yüklənməsi az olduqda yuxarıdakı hər 3 metod deməy olar eyni nəticə göstərir. Lakin, yüklənmə çox olanda ən qısa növbəlilik metodu digərlərindən daha yaxşı nəticə göstərir.

Paylanmış sistemlərdə veb serverin performansı daha effektiv olduğu aşkarlanmışdır. Xüsusi ilə bu daha az yüklənmiş mühitdə daha müsbət nəticələr vermişdir. Lakin yüklənmə ağır olanda, növbələşmə uzunluğu 2 sahə arasında kəskin fərq olur.

Jianhua Cao. Mikael Andersson, Christian Nyberg və Maria Kihl[6] veb serverin performans model planının qurulması üçün yeni M/G/1/K*PS növbəlilik modeli təklif etmişlər. Burada, sistemin performans ölçülərinin məsələn, orta cavab zamanı, ötürücülük və bloklamanın ehtimalı daxildir. Riyazi hesablamalar həmin dəyərlərin ölçülməsi üçün aşağıdakı düsturlardan istifadə etmişlər:

Şəkil 4. Dəyərlərin ölçülməsi üçün düstur

$$P_b = P[N = K] = \frac{(1-\rho)\rho^K}{(1-\rho^{K+1})}.$$ *Bloklamanın ehtimalı*

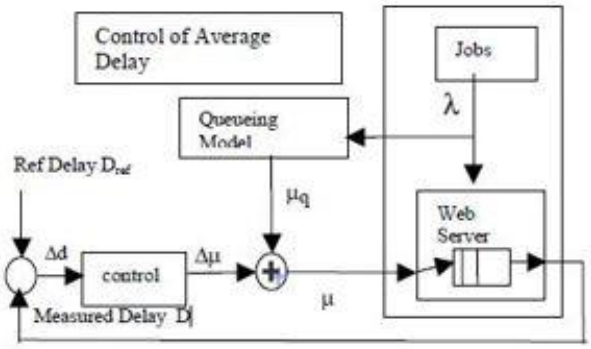
$$H = \lambda(1 - P_b).$$ *Ötürücülük*

$$T = \frac{E[N]}{H} = \frac{\rho^{K+1}(K\rho - K - 1) + \rho}{\lambda(1-\rho^K)(1-\rho)}$$ *Ortalama cavab zamanı*

Aparılmış simulyasiya eksperimentləri onu göstərir ki, bu model həm az, həm də çox yüklənmə zaman performansın ölçü vahidlərini təxmin etməyə imkan verir

Lui Sha, Xue Liu və başqaları [7]məqsəd olaraq elə bir model təklif etdilər ki hərhansı ləngimə baş verərsə həmin an üçün sistemin spesifikasiyalarını təyin etməsi və ona uyğun növbəti dəfə bu halların yaşanmaması üçün performans planlamasını etməkdən ibarətdir.

Şəkil 5. İdarəetmə əsaslı növbələşmə modeli



Modeldən də göründüyü kimi sistemin orta gecikmə müddətini ölçür. Model daxilindəki növbələşmə metodu veb serverə hansı gecikmə ilə paketlərin çatmasını təyin edərək növbətilərdə bunu nəzərə almağa imkan verir. Burada mü intensivliyi ilə növbəyə daxil olan istifadəçilərin gecikmə dəyərləri riyazi hesablamalarla yoxlanılmış və uyğun mühit yaratdığını bir daha özündə əks etdirmişdir.

Xəstəxanalarda tibbi informasiya daxili şəbəyə qoşulmuş tibbi avadanlıqlar vasitəsilə toplanır və sonra serverlərə ötürülür. Beləliklə, tibbi server sistemlərinin performansı yüksək keyfiyyətli xidmət səviyyəsinin təmin edilməsi üçün daha vacib rol oynayır. **Ying-Wen Bai və Chien-Yung Cheng** [8] bununla bağlı tədqiqat aparmışdır. Tədqiqatın aparılmasında əsas məqsəd ən optimal növbəlilik şəbəkə modelindən istifadə edərək tibbi informasiya sisteminin performans indeksini qiymətləndirməkdir. Buraya, serverin cavab zamanının (response time) hər yüklənmə üçün ölçülərək ən az olanını seçilməsi də daxildir. Xəstəxana informasiya sistemi üçün yeni növbəlilik modeli təklif edilmişdir. Ehtimal nəzəriyyəsindən istifadə edilmiş, paralel və ardıcıl növbələrin birləşdirilməsi həyata keçirilmişdir. Hər bir xəstə üçün fərdi verilənlərin dərəcəsi bərabər hesab edilir. Beləliklə, "lambda=m" burada m-xəstələrin sayıdır. Hər bir tibbi verilən üçün çatma və xidməti paylanma var. Hər bir xidmt sorğusu azaddır və yaddaşsız çatma prosesindən ibarətdir. Burada M/M/1/n növbəlilik modelindən istifadə edilərək Markov statistikası əsasında bir sıra nəticə əldə etmək olur. "Lambda" – ümumi çatma dərəcəsini ifadə edir.

Weiwei Konga, Yang Lei, Jing Ma [9] əvvəllər istifadə olunan alqoritmlərin çatışmazlıqlarını analiz edərək yeni modifikasiyalı model və alqoritmlərin tətbiq edilməsi ilə virtual maşınların bulud mühitində resursların daha optimal şəkildə paylanaraq istifadəçi tərəfindən göndərilən sorğulara vaxtında cavab verməsi və növbəlilik prinsipləri daxilində daha az zaman itkisi ilə nəticə əldə edilməsi üçün yeni yanaşma ortaya qoydular. Onların təklif etdiyi alqoritm aşağıdakılardan ibarətdir:

RI - burada xidməti sorğu kəmiyyətirdi ki, bulud xidmət təminatçıları vahid zamanda bunu qəbul edir. RI böyük olanda, müştəriyə daha çox resurs kəmiyyəti ayrılır.

DI-burada elə bir xidməti sorğu kəmiyyətirdi ki, virtual maşın resursları vahid zamanda başa çatır. Burada Dİ bulud xidməti resurslarının istifadəçi sorğuları ilə münasibətini əks etdirir.

LI - burada virtual maşın resursu üçün müştərinin xidmətini tamamlamağa tələb olunan ortalama zaman ilə və müştərinin xidmət sorğuları intervalı zamanı arasında bir nisbətdir.

CI - isə virtual maşın resursunn normal işləməsini idarə etmək tələb olunan dəyərin ölçülməsində istifadə olunur.

Şəkil 6. Alqoritmin ölçü dəyərləri

$$RI = \sum_{i=1}^{n} RI_i \qquad DI = \sum_{i=1}^{n} DI_i \qquad LI = \frac{t_i}{t_d} \qquad CI = \left[\sum_{i=1}^{n} C_{il}, \sum_{i=1}^{n} C_{iR}\right]$$

Şəbəkədə prioriteti az olan dataların prioriteti çox olanla ilə müqayisə aparıla bilməmək qabiliyyətinin olmaması səbəbi ilə ləngimələr müşahidə olunur. Davamı olaraq növbəlilik modelinin burada düzgün qərar verməməsi datanınn daha böyük fasilələrlə ötürülməsinə səbəb olur. **Sami Kibria, Alice S. Rueda və başqaları[10]**öz tədqiqatlarında blutuz sistemləri üçün elə yeni gözləmə modeli təqdim etdilər ki, ad-hoc topologiyasını idarə edərək yüksək prioritetli tapşırıqlara daha çox yer vermiş oldu. Model M/G/1 əsaslı təklif olunan prioritet növbəlilik modelinin strukturudu. Model 5 kəmiyyət faktoru əsasında qurulub. Bandwith, gecikmə, gecikmə fərqi, ötürücülük və paketin itkisi. Bu dəyərlərin hesablanması üçün müxtəlif riyazi ifadələrdən istifad edilir. Eyni zamanda növbəd prosesin zamanını ölçmək üçün M/M/1 sistemindən istifadə edilir.

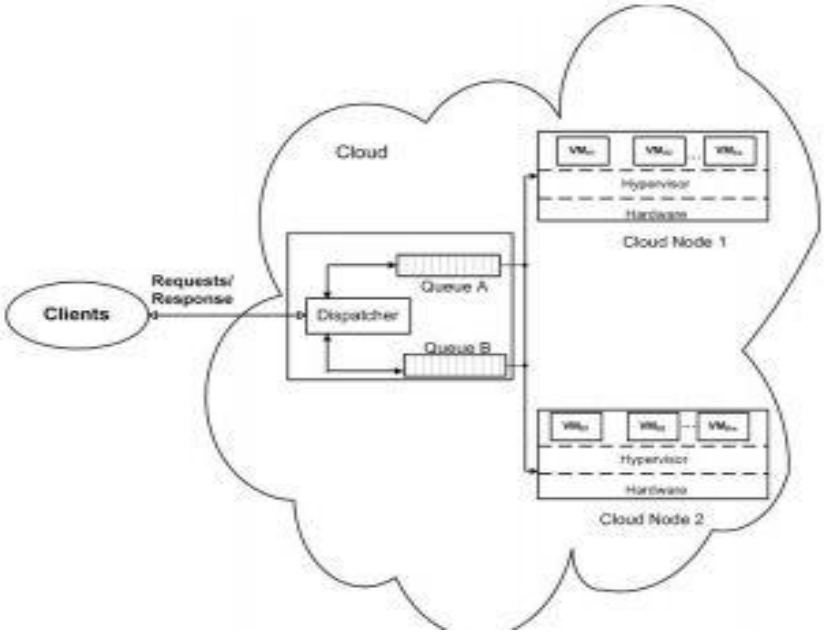
Seyed A. Motamedi, Mohammad K. Akbari [11]klaster veb serverlərİQRD adlı alqoritmi təklif etmişlər. Bu model yüklənmənin balanslaşdırılması üçün daha sürətli, ağıllı və bilik əsaslı qərarlar verməyə köməy edir. Burada əsas məqsəd sorğular üçün ortalama cavab zamanını minimallaşdırmaq və veb serverin ötürücülük qabiliyyətini yüksəltməkdir. Buna görə də, İQRD alqoritmi müştəri və serverin informasiyalarından istifadə edərək yüklənmənin balanslaşdırılması qərarlarını verirlər. Buna nail olmaq üçün bütün sorğular cavab zamanına əsasən onları K siniflərinə ayırır. Alqoritm periodiki olaraq gələn sorğular çatma dərəcəsini və veb serverlərin yükləmə statusunu hesablayır. Bu informasiyaya əsasən alqoritm hər bir veb serverin tutumunu fərqli sorğu sinifləri arasında bölür. Bunları icra etdikdən sonra veb server növbəti gələn sorğulara əsasən öz tənzimləmələrini reallaşdırır. Əsas qarşıya qoyulmuş məqsəd istifadəçi sorğuların heç bir itki olmadan veb server tərəfindən cavablandırılması və cavab itkisini maksimum dərəcədə minimallaşdırmaqdır.

Shinya Kitajima, Jing Cai və başqaları[12]statik vəziyyətdə seçilən metodun dinamiki olaraq serverdə növbələrin sırasının dəyişməsi, həmçinin sistemin vəziyyətinə və sorğunun son tarixinə görə sorğunun optimal işləməsi üçün metodun dəyişməsinin mümkünlüyünün yaranması məqsədi ilə LRT (Ən Az Cavab Zamanı) Metodunu irəli sürmüşlər. Bu metod cavab zamanına əsasən sorğu emal metodunu seçir. Server müştəridən sorğu qəbul edəndə, tələb əsaslı, müştəri əsaslı və əməkdaşlır metodlara uyğun onun cavab zamanını hesablayır. Sonra 3 metod arasından ən az cavab zamanı olanını seçib sorğunu emal edir.Təklif olunmuş metod müəllif tərəfindən simluyasiya mühitində yoxlanılmışdır. Lakin, bu metodu sorğu emalı tezliyinə əsasən dinamiki olaraq real vaxt rejimdə yoxlanılması nəzərdə tutulmuşdur. Eyni zamanda sorğu intervalı dinamiki olaraq dəyişən mühitlərdə də bu testin keçirilməsi planlaşdırılır.

Dinamik sistemlərdə müştəri sorğularının daha effektiv, vaxt itkisi olmadan və əlavə resurs tələb etmədən əldə edilməsi metodunun tətbiqi üzrə **AV.Karthick, Dr.E.Ramaraj və R.Ganapathy Subramanian [13] tərəfindən** elmi tədqiqataparılmışdır.Təklif olunan metod (Multi

Queue Job Scheduling) ən pik zamanlarda iş bölgüsünün növbələşmə ilə aparılması nəticəsində keyfiyyətinin artırılmasına kömək edir. Göndərilmiş istifadəçi tələbləri pik zamanların artması ardıcıllığı ilə sıralanır. Bu da müştəri məmnuniyyətini yüksəltməyə köməy edir. Çünki burada onların ehtiyacları tələblərinə uyğun olaraq fərqləndirilir.Bunun nəticəsində dinamiki dəyişən sorğular bütün mümkün və sistemin performans dəyərini azaltmayacaq dərəcədə ən doğru formada seçilir. Xidmət təminatçısı (service provider) gələn tapşırıqları növbə idarəçisinə yönləndirir. Növbə idarəçisi (queue manager) uyğun resursların yönləndirilməsini təmin edir. Burada onun əsas funksiyası klasterdəki bütün resursların düzgün istifadə edilməsinə nəzarətdir.

Şəkil 7. Buludda veb tətbiqləri üçün növbəlilik modeli



V. Goswami, S. S. Patra və G. B. Mund[14]bulud bazasında hər gözləmə müddətinə görə istifadəçilərin əlavə resurslardan istifadə və eyni zamanda pul ödəmə problemlərinin həlli məqsədi ilə yeni veb tətbiqləri üçünnövbəlilik modeli təklif etmişdir.

Bu modeldə virtual maşınlar xidmət mərkəzləri kimi götürülür və veb tətbiqetmələri növbələr kimi modelləşdirilir. Burada sonlu bufer çox serverli növbələşmə sistemini növbəli asılı heterogen serverlərlə istifadə edirlər. Bulud texnologiyasında xidmətin yükü dinamki olaraq ölçülür.

Multi-tenant növbəlilik prinsipinin istifadə edilməsinə rəğmən böyük iş axınlarında sistemin tab gətirə bilməməsi səbəbi ilə gecikmələr baş verir. Burada əsas problem növbəlilik nəzəriyyəsində bəzi çatışmazlıqlardır. Bu məqsədlə **Han Chen, Fan Ye, Minkyong Kim, Hui Lei [15]** BDQS adlı yeni prototip təklif etmişlər. Bu prototip İaaS platformasında işləyir. Hansı ki, N sayda virtual maşınlardan istifadə edir. Gigabit şəbəkəyə qoşuludur. Hər serverdə Cassandra adlanan hissə var. O mesajların paylanmış yaddaşı, mesaj indeksləri və digər əlaqəli metadataları təmin edir. Növbəlilik əməliyyatlarının tətbiqi üçün APİ dəstəyinin mümkünlüyü üçün HTTP REST komponenti istifadə olunur. O HTTP cildləmə üzərindən növbələşmənin təmini üçün APİ-dən istifadə edir. Aparılan eksperimentlər nəticəsində BDQS daha yüksək ifa qabiliyyəti göstərmişdir. Digər modellərdən fərqli olaraq təklif olunan bu model mesaj itkilərinin sayını xeyli azaltmışdır.

Mohamed Eisa, E. I. Esedimy, M. Z. Rashad [16]4moduldan ibarət model təklif etmişlər. Təklif olunan model tətbiqi olaraq yoxlanılmış və digər modellərə nisbətən daha yüksək istifadə dəyəri və cavab zamanı göstərmişdir. . İlk olaraq, fərqli nöqtələrdən qlobal planlamaya sorğular gəlir. Hər bir sorğu daxili kontrollerə komunikasiya şəbəkəsindən keçərək gəlir və sonra yerli növbəyə göndərilir. Qısaca desək, fərqli yerlərdən gələn sorğular Qlobal planlayıcıya ötürülərək daha sonra yerli planlayıcı tərəfindən qəbul edilir. Bu mərhələdə o növbənin sırasını təyin etməyə məsuliyyət daşıyır.

FİFO, Round robin kimi alqoritmlərin mövcudluğuna baxmayaraq dinamiki dəyişən mühitdə mövcud alqoritmlərinin optimallaşdırması məqsədi ilə **P. Suresh Varma, Satyanarayana A, M V Rama Sundari [17]** növbəlilik nəzəriyyəsini tətbiq edərək bufferin sayından asılı olaraq resursların yerləşdirilməsi üçün uyğun hesablama modellərini analzi etmişdir. Təklif olunan yol növbələşmə zamanını azaldır və istifadə və performans kimi bəzi məsələləri nəzərə alaraq daha effeltoiv nəticənin alınması müşahidə edilmişdir.

Kousik Dasgupta, Brototi Mandal, Paramartha Dutta, Jyotsna Kumar Mondal, Santanu Dam [18]bulud mühitində yük balanslaşdırılması əsaslı Genetik alqoritm üzərində yeniliklər edərək çoxlu sayda istifadəçi yararlanmağa çalışanda bu zaman serverlərdə yüklənmələrin qarşısını almağa xidmət edir.

Təklif olunan alqoritm 3 əməliyyatı icra edir: seçmə, genetik əməliyyat və yerdəyişmə. Bu üsulun üstünlüyü ondadır ki böyük həcmli boşluqları idarə etmə və mürəkkəb funksiyaların tətbiqedilə bilməsi imkanına malikdir. Aşağıdakı formada proses icra olunur:

1) Başlanğı məskunlaşma nəsli – Bu alqoritm ilk öncə bütün mümkün həllər ikilik stringə kodlaşdırılır. Bununla da başlanğıc məskunlaşmadan 10 xromosom ixtiyari seçilir
2) Çarpazlama – Bu mərhələnin məqsədi ən çox seçilən cütlüklərin çarpazaşdırılmasıdır. Verilən funksiya ilə hər bir fərdi xromosomların uyğunluq dəyəri hesablanır. Nəticədə yeni cüt fərdlər əmələ gəlir.
3) Mutasiya-Mutasiya ehtimalı kimi çox kiçik dəyərlər toplanılır. Mutasiyanın dəyərindən asılı olaraq xromosom bitləri 1-dən 0-a və ya 0-dan 1-ə keçirilir. Yeni çarpazlama üçün yeni hovuzun mutasiyası ekrana çıxır.

Buluddakı çoxlu sayda istifadəçi hərhansı məlumatı istifadə edərkən bəzən göndərilən sorğularda gecikmələr baş verir. Burada əsas problem isə növbəliliik prinsipinə riayət olunmamasıdır. Yəni, ki "pay-as-you-go" modelinə əsasən bir istifadəçi adi bir datanı əldə etmək üçün daha çox zaman və resursdan istifadə edərək onun daha çox pul ödəməsinə səbəb olur. Nəticədə müştəri məmnuniyyəti konsepsiyası aradan qalxır. Dinamiki resursların istifadəsi problemi hələ də qalmaqdadır. **Chandrashekhar S. Pawar, Rajnikant B. Wagh-nin** təklif etdiyi alqoritmdə 1-ci mərhələdə xidmət sorğusu bulud planlayıcıya gəlib çatır**[19]**. Sonra planlayıcı bunu bir neçə tapşırıqlara bölür. Sonra 2-ci mərhələ çağırılır. Öz adıcıllıq sırasına görə düzür. Burada virtual maşın uyğun resursları deploy etməy üçün axtarış edir. Daha sonra hər bir buludda işləyən virtual maşınların sayı haqqında informasiya toplayır.

Yüksək sürətli şəbəkələrdə sistemin ötürücülük qabiliyyətinin yüksək olması, daha uzun növbələşmənin gecikməsi səbəbi ilə TCP əlaqəsinin paketləri yönləndirməkdə problemlərlə üzləşdiyi və paketlərin itməsi müşahidə olunur. Bu səbəbdən **Lin Xue, Suman Kumar və başqaları [20] tərəfindən** təxmini düzgünlüyü təyin etmə və gecikmənin idarəedilməsinə əsaslanan növbəlilik modeli ortaya çıxdı.

Burada funksional blok diaqramından istifadə etməklə məlumat paylaşımını daha yüksək sürətlərdə heç bir itki olmadan yerinə yetirilməsinə imkan verir. Lakin simulyasiya nəticələrinə baxdıqda bu metodun çox vaxt özünü doğrultmağı ortaya çıxmaqdadır. Bu səbəbdən bu metodun gələcəkdə daha da təkmilləşdirilməsinə ehtiyac vardır.

3. Təklif olunan modellərin analizi

3.1 Modellərin ümumi analizi

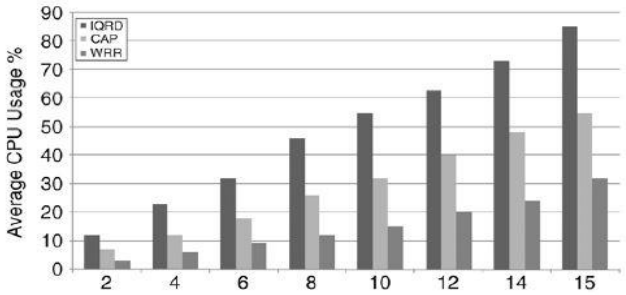
Kousik Dasgupta, Brototi Mandal, Paramartha Dutta, Jyotsna Kumar Mondal, Santanu Dam [18]paylanmış iş mühitində çoxlu sayda istifadəçinin olduğu sistemlərdə yaranan yüklənməni aradan qaldırmaq məqsədi ilə yük balanslaşdırılma əsaslı Genetik alqoritmini təklif etmişdir. Həmin alqoritm bulud simulyatorunda digər alqoritmlər FCFS, Round Robing (RR) və yerli axtarış alqoritmi olan stohastik təpəyə qalxma alqoritmləri ilə birgə testdən keçirilmişdir. Tədqiqatçı əsas effektivlik (KPİ) göstəricisi kimi cavab zamanı seçmişdir. Sadalanmış 4 alqoritmlər 25, 50, 75 virtual maşın olan bulud mühitində sınaqdan keçmişdir. Ümumi nəticə onu göstərmişdir ki, təklif olunan alqoritm təkcə sistemin yük balansını azaltmaqla deyil, eyni zamanda müştərinin xidmət səviyyəsinin zəmanət verməyə qadirdir.

Şəkil 8. 4 alqoritmin performans analizi

S.No	Cloud configuration	DC specification	RT using GA	RT using SHC	RT using RR	RT using FCFS
1.	CC1	Each with 25 VMs	350.32	356.82	361.17	363.34
2.	CC2	Each with 50 VMs	350.19	355.25	362.49	363.52
3.	CC3	Each with 75 VMs	346.01	350.73	356.18	361.56
4.	CC4	Each with 25,50 and 75 VMs	345.98	350.01	356.21	360.87

Seyed A. Motamedi, Mohammad K. Akbari [11]klaster veb serverlərİQRD adlı alqoritmi təklif etmişlər. Bu model yüklənmənin balanslaşdırılması üçün daha sürətli, ağıllı və bilik əsaslı qərarlar verməyə köməy edir. Burada əsas məqsəd sorğular üçün ortalama cavab zamanını minimallaşdırmaq və veb serverin ötürücülük qabiliyyətini yüksəltməkdir. Analiz baxımından bu alqoritm eksperiment mühitində rəqibi olan WRR (Weighted Round Robin) və CAP alqoritmləri müqayisəsi aparılmışdır. 2 halda test aparılmışdır. Birinci hal, aşağı yüklənmə vəziyyətidir ki, burada İQRD alqoritmi daha az cavab zamanı əldə etmişdir. Lakin, burada İQRD və CAP arasında fərq cüzi olsada, WRR alqoritmi nəzərəçarpan fərqlə geri qalmaqdadır. Ötürücülük İQRD alqoritmi üçün maksimum həddə çatan zaman CPU-dan istifadə göstərici 85% faiz olduğu halda, digər 2 alqoritmdə bu nisbət 100% olur. Tədqiqatçı KPİ göstəricisi kimi cavab zamanına əsasən 3 alqoritm arasında müqayisələrini aparmışdır və belə nəticəyə gəlmişdir ki, İQRD digər ənənəvi alqoritmlərdən fəqrli olaraq ən yaxşı ölçüləbilən sistemə sahib olub yük balanslaşdırmasını və klaster resurslarının paylaşılmasını daha düzgün edən alqoritmdir.

Şəkil 9. Fərqli klaster ölçüsü üçün CPU istifadəsi



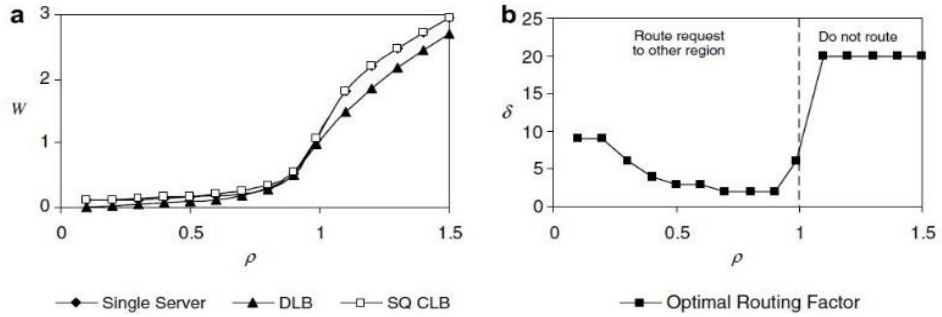
Jianhua Cao. Mikael Andersson, Christian Nyberg və Maria Kihl [6]veb serverlər üçün artıq yüklənmmənin idarəedilməsi və tutum planlaşdırılması mövzusu üzrə etdikləri tədqiqatda M/G/1/K*PS növbəlilik modelini təqdim etməklə sistemin performans ölçülərinin məsələn, orta cavab zamanı, ötürücülük və bloklamanın ehtimalı ölçmüşlər. Bu model simulyasiya mühitində özünü digərlərinə nisbətən daha yaxşı göstərmişdir. Eksperiment 1 server və 2 müştəri kompyuterlər arasında aparılmışdır. Bu təcrübələrdə əsas məqsəd 2 göstərici arasında fərqin nə dərəcədə fərqləndiyini göstərmək üçündür. Tədqiqatın nəticəsi onu göstərir ki, riyazi düsturlarla alınan performans dəyərləri (orta cavab zamanı, ötürücülük və bloklamanın ehtimalı) təklif olunan model əsasında ehtimal olunan nəticələrlə təxminən üst-üstə düşür.

Payam Amani, Maria Kihl, Anders Robertsson [3]təklif etdikləri ölçən model yüksək dəqiqliklə aşağı və yuxarı yüklənmə halları altında öncədən təyin edilən çox mərhələlərdə tək serverli növbələşmə sisteminin cavab zamanını təxmin etmə qabiliyyətinə malikdir.. Növbəli tək server üçün təklif olunmuş NARX əsaslı çox mərhələli cavab zamanını öncədən təxmin edən müxtəlif şərtlər daxilində simulyasiya mühitində özünü müsbət tərəfdən göstərmişdir. Simulyasiyalar göstərmişdir ki, təklif olunan təyinedici daha az xəta ilə adı çəkilmiş sistemlərdə daha yaxşı dəqiqliklə cavab zamanını təxmin etmişdir.

Zhongju Zhang və Weiguo Fan[5] veb server və veb səhifə arasında həddindən artıq yüklənmə nəticəsində istifadəçi sorğular yolda yarımçıq qalması, itkinin yaranması və burada istifadə olunan modellərin hazırki tələbatı ödəməkdə qarşılaşdığı çətinlikləri qeyd etmişdir. Onların məqaləsi 2 veb server arasında yük balanslaşmasının analizi üçün növbəlilik modelinin tədqiqi ilə bağlıdır. Həm mərkəzləşdirilmiş, həm də paylanmış sistemlərdə yüklənmənin balanslaşdırılmasının daha effektiv olması üçün simulyasi mühitində təcrübələr aparılmışdır. Müxtəlif 3 növ marşrutlama üsulundan istifadə edərək bu 2 mühitdə müəyyən nəticələr əldə edilmişdir.

Serverin az yüklənmə halında mərkəzləşdirilmiş yükləmə balans modeli daha yaxşı işlədiyi halda, sorğuların pik həddə çatdığı anlarda nəticə çox aşağı düşmüş oldu. Lakin, paylanmış modeldə veb serverin performans göstəricisi müəyyən xətta ilə aşağı düşməsinə baxmayaraq digər modelə görə daha faydalı iş əmsalı göstərmiş oldu.

Şəkil 10. Paylanmış , mərkəzləşdirilmiş və tək server modellərinin müqayisəsi



3.2 Mənim Fikrim

Bu məqalədə araşdırılmış əsas tədqiqat sahəsi veb serverdə növbəlilik modellərinin analizi və yükləmə balanslaşmasını ən optimal formada icra edən metod və modellərin tədqiq üzərində dayanmışdır. Mənim fikrimcə, bu movzuyla bağlı ədəbiyyat icmalından belə nəticəyə gəldim ki, **Kousik Dasgupta, Brototi Mandal və başqalarının [18] təklif etdiyi** yük balanslaşdırılma əsaslı Genetik alqoritmi təyin edilmiş əsas effektivlik (KPİ) göstəriciləri üzrə ən yaxşı

nəticə göstərməklə problemin həllində daha uğurlu nəticə əldə etmişdir. Tədqiqatda aparılmış təcrübələr real iş mühitində məhdud sayda istifadəçilərin veb server mühitində çoxlu sayda virtual maşınların xidmətə qoşulması ilə test edilmişdir. Müxtəlif sayda virtual maşınlardan alınan nəticələr göstərir ki, digər ənənəvi alqoritmlər Genetik alqoritmdən cavab zamanının yuxarı olması səbəbi ilə geri qalmaqdadır.

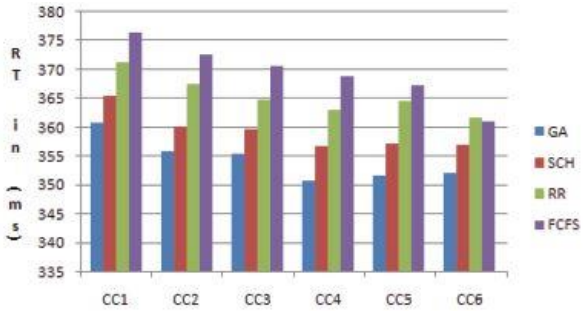
Cədvəl 1. Genetik alqoritminin digər alqoritmlərlə cavab zamanına (KPİ) görə müqayisəsi

	25 virtual maşın	50 virtual maşın	75 virtual maşın
Genetik alqoritm	348.85 (ms)	345.54 (ms)	340.65 (ms)
Stoxastik təpəyə qalxma alqoritmi	354.35 (ms)	350.71 (ms)	346.46 (ms)
Round Robing	359.35 (ms)	356.93 (ms)	352.09 (ms)
FCFS alqoritmi	360.95 (ms)	359.97 (ms)	358.44 (ms)

Tədqiqatçı 4 alqoritm arasında etalon kimi qoyduğu 350 milli saniyə normal cavab zamanı riyazi olaraq ödənildiyindən Genetik alqorimin problemin öhdəsindən daha yaxşı gəlməsini göstərir. Təklif olunan alqoritm 3 əməliyyatdan ibarətdir: seçmə, genetik əməliyyat və yerdəyişmə. Bu alqoritm biologiyada bildiyimiz addan götürülüb və yeni növbənin yaranması xromosomların peyda olması kimi xarakterizə olunur. Düstur olaraq zaman çətinliyini versək: Burada c-k sayda xromosomların yoxlama dəyəri, k –xromosomların sayı, m – xromosomun uzunluğu.

$$G = O\,[n1+(c \times k) + (n2 + 1)\,(m+m+m)]$$

Şəkil 11. Genetik alqoritminin digər alqoritmlərlə müqayisəsi



4. Nəticə

Genetik alqoritmi dinamiki və paylanmış veb server mühitində digər ənəvi alqoritmlərdən fərqli olaraq sistemin gözləmə zamanını daha aşağı salaraq növbədə gözləyən müştərilərin pakek və sorğularının itki olmadan sürətli şəkildə mübidəsinə imkan verir. Tədqiqatçı [18] yükləmə balansı strategiyasını təklif etməklə verilən tapşırıqları minimum zaman intervalında icra etməklə həm müştəri məmnuniyyətinə qoruyur, eyni zamanda sistemin performansının aşağı düşməsinə şərait yaratmır.

ƏDƏBİYYATLAR.

[1] Luis Aversa və Azer Bestavros, "Load Balancing a Cluster of Web Servers," Performance, Computing, and Communications Conference, 2000. IPCCC '00. Conference Proceeding of the IEEE International, pp. 24 -29, Feb 2000.

[2] Bhavin Doshi, Chandan Kumar, Pulkit Piyush və Mythili Vutukuru, "WebQ: A Virtual Queue For Improving UserExperience During Web Server Overload," 2015 IEEE 23rd International Symposium on Quality of Service (IWQoS), pp. 135 – 140,15-16 June 2015.

[3] Payam Amani, Maria Kihl, Anders Robertsson, "Multi-step ahead response time prediction for single server queuing systems," Computers and Communications (ISCC), 2011 IEEE Symposium,pp. 950 – 955,June 28 2011-July 1 2011.

[4] Parijat Dube və Rahul Jain, "Queueing Game Models for Differentiated Services," Game Theory for Networks, 2009. GameNets '09. International Conference, pp. 523 – 532, 13-15 May 2009.

[5] Zhongju Zhang and Weiguo Fan, "Web server load balancing: A queueing analysis," European Journal of Operational Research. vol. 186, Issue 2, , pp. 681–693, 16 April 2008.

[6] Jianhua Cao. Mikael Andersson, Christian Nyberg və Maria Kihl, "Web Server Performance Modeling Usingan M/G/l/K*PS Queue," Telecommunications, 2003. ICT 2003. 10th International Conference on (Volume:2).

[7] Lui Sha, Xue Liu and others, "Queueing Model Based Network Server Performance Control," Real-Time Systems Symposium, 2002. RTSS 2002. 23rd IEEE, pp. 81 – 90,2002.

[8] Ying-Wen Bai and Chien-Yung Cheng, Computer-Based Medical Systems, 2004. CBMS 2004. Proceedings. 17th IEEE Symposium, pp.191 – 196, 24-25 June 2004.

[9] Weiwei Konga, Yang Lei, Jing Ma, "Virtual machine resource scheduling algorithm for cloud computingbased on auction mechanism," Optik - International Journal for Light and Electron Optics, vol. 127, pp. 5099–5104.

[10] Sami Kibria, Alice S. Rueda, Jose A. Rueda, "Queueing Model for Bluetooth Multipoint Communicntion," Electrical and Computer Engineering, 2002. IEEE CCECE 2002. Canadian Conference, vol. 3, pp. 1357 – 1362, 2002.

[11] Seyed A. Motamedi, Mohammad K. Akbari, "A content-based load balancing algorithm with admission control for cluster web servers," Future Generation Computer Systems, Volume 24, Issue 8, October 2008, Pages 775–787.

[12] S.Kitajima, Jing Cai, Tsutomu Terada, Takahiro Hara, Shojiro Niszhio, "A Query Processing Mechanism Based on the Broadcast Queue for Broadcast Datab ase Systems," 2006 1st International Symposium on Wireless Pervasive Computing, pp. 1 – 6, 16-18 Jan. 2006.

[13] AV.Karthick, Dr. E.Ramaraj və R.Ganapathy Subramanian "An Efficient Multi Queue Job Scheduling for Cloud Computing," Computing and Communication Technologies (WCCCT), 2014 World Congress, pp. 164 – 166, Feb. 27 2014-March 1 2014.

[14] V. Goswami, S. S. Patra and G. B. Mund, "Performance analysis of cloud with queue-dependent virtual machines, " Recent Advances in Information Technology (RAIT), 2012 1st International Conference, pp. 357 – 362. 15-17 March 2012.

[15] Han Chen, Fan Ye, Minkyong Kim, Hui Lei, "A Scalable Cloud-based Queuing Service with Improved Consistency Levels," Reliable Distributed Systems (SRDS), 2011 30th IEEE Symposium, pp. 229 – 234, 4-7 Oct. 2011.

[16] Mohamed Eisa, E. I. Esedimy, M. Z. Rashad, "Enhancing Cloud Computing Scheduling based on Queuing Models," International Journal of Computer Applications 2014, vol. 85 - Number 2.

[17] P. Suresh Varma, Satyanarayana A, M V Rama Sundari, "Performance Analysis of Cloud Computing using Queuing Models," Cloud Computing Technologies, Applications and Management (ICCCTAM), 2012 International Conference, pp. 12 – 15, 8-10 Dec. 2012.

[18] Kousik Dasgupta, Brototi Mandal, Paramartha Dutta, Jyotsna Kumar Mondal, Santanu Dam, "A Genetic Algorithm (GA) based Load Balancing Strategy for Cloud Computing,"International Conference on Computational Intelligence: Modeling Techniques and Applications (CIMTA) 2013.vol. 10, pp. 340-347, 2013.

[19] Chandrashekhar S. Pawar, Rajnikant B. Wagh, "Priority based dynamic resource allocation in Cloud computing with modified waiting queue," Intelligent Systems and Signal Processing (ISSP), 2013 International Conference on, pp. 311 – 316.

[20] Lin Xue, Suman Kumar, Cheng Cui, Praveenkumar Kondikoppa and others, "AFCD: An Approximated-Fair and Controlled-Delay Queuing for High Speed Networks," 2013 22nd International Conference on Computer Communication and Networks (ICCCN). pp. 1 – 7, July 30 2013-Aug. 2 2013.

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2017. Volume 1, Number 2 *Pages 140-148*

UOT: 517.982.4

NONLINEAR ELLIPTIC CONVOLUTION DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATIONS

Hummet K. MUSAEV
Baku State University
Department of Differential and Integral Equations
Baku / AZERBAIJAN,
gkm55@mail.ru

ABSTRACT

The regularity properties of convolution-elliptic equations are investigated. Here we find sufficient conditions that guarantee the separability of linear problems in weighted L_p- spaces. By using these results the existence and uniqueness of maximal regular solution of the nonlinear, in particular, quasilinear convolution equation is obtained in weighted L_p-spaces.

Key Words: sectorial operators, abstract weighted spaces, operator-valued multipliers, convolution equations, quasilinear convolution-differential equations, Sobolev-Lions space.

QEYRIXƏTTI ELLIPTIK KONVOLUTION DIFERENSIAL OPERATOR TƏNLIKLƏR

ABSTRACT

Konvolution elliptik tənliklərin requlyarlıq xassələri araşdırılır. Burada çəkili Lp - fəzalarında xətti problemlərin separabeli üçün kafilik şərtləri tapılır. Əldə olunan nəticələr çəkili Lp fəzasında kvazixətti konvolution tənliklərin maksimal requlyar həllinin varlığı və yeganəliyinin öyrənilməsinə tətbiq edilir.

Açar sözlər: sektorial operatorlar, abstrak çəkili fəzalar, operator qiymətli multiplikatorlar, kvazixətti diferensial operator tənliklər, Sobolev-Lions fəzası.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СВЕРТОЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

Исследуются свойства регулярности сверточно-эллиптических уравнений. Здесь мы находим достаточные условия, гарантирующие сепарабельность линейных задач в весовых Lp-пространствах. Используя эти результаты, существование и единственность максимально-регулярного решения нелинейных, в частности, квазилинейных уравнений свертки получается в весовых Lp-пространствах.

Ключевые слова: секториальные операторы, абстрактные весовые пространства, операторнозначные мультипликаторы, уравнения свертки, квазилинейные сверто-дифференциальные уравнения, пространство Соболева-Льионса.

1. Introduction

Convolution operators in Banach-valued function spaces and regularity properties elliptic and parabolic type of differential-operator equations studied e.g., in [3], [7-9], [13], [15], [18]. However, the convolution differential-operator equations (CDOEs) are relatively less investigated subject. In [1], [10-12], [16] and [19] regularity properties of CDOEs are studied. In a series of recent publications operator-valued multiplier theorems have had many applications in the theory of CDOEs. The main aim of the present paper is to study the maximal L_p − regularity properties of the linear CDOEs

$$\sum_{|\alpha|\leq l} a_\alpha * D^\alpha u + (A+\lambda) * u = f(x), \tag{1.1}$$

in E −weighted $L_{p,\gamma}$ spaces, where l is a natural number, $a_\alpha = a_\alpha(x)$ are complex-valued functions, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \alpha_k$are nonnegative integers, λ is a complex parameter and

$A = A(x)$ is a linear operator in a Banach space E for $x \in R^n$. Here, the convolutions $a_\alpha * D^\alpha u, A * u$ are defined in the distribution sense (see e.g., [2]), where $\gamma = \gamma(x)$ is a positive measurable function on $\Omega \subset R^n$.

In application, we obtain the quasilinear convolution differential-operator equations. Our results on maximal L_p −regularity of linear problem (1.1) are then used to solve the existence and uniqueness of maximal regular solution for the following nonlinear CDOE

$$\sum_{|\alpha|\le l} a_\alpha * D^\alpha u + G(x, D^\sigma u)u = F(x, D^\sigma u) + f(x), |\sigma| \le l - 1 \tag{1.2}$$

where G, F are nonlinear operators in a Banach space E and f is a given E −valued function.

One of main features of the present work is that the convolution equation (1.1) has a variable operator coefficient. Since the equation (1.1) has an unbounded operator coefficient, some difficulties occur. In this paper, we establish the uniform separability properties of the problem (1.1). This fact is derived by using the representation formula for the solution of (1.1) and operator valued Fourier multipliers in $L_{p,\gamma}(R^n; E)$

The present paper is organized as follows, The first section of the paper contains an introduction. Section 2 collects definitions, some notations and basic properties of vector-valued weighted spaces. Section 3 contains basic coercive estimates on E-valued weighted $L_{p,\gamma}$- spaces. In section 4, using the results obtained in section 3 the maximal regularity of problem (1.2) is proved.

2. Notation and background

We start by giving the notation and definitions to be used in this paper.

Let N denotes the set of natural numbers. $\mathbb{R}$ denotes the set of real numbers. Let $\mathbb{C}$ be the set of complex numbers and

$$S_\varphi = \{\lambda \in C, |arg\lambda| \le \varphi\} \cup \{0\}, 0 \le \varphi < \pi.$$

Let E_1 and E_2 be two Banach spaces and let $B(E_1, E_2)$ denote the space of bounded linear operators from E_1 to E_2. For $E_1 = E_2 = E$ we denote $B(E, E)$ by $B(E)$.

Let $D(A), R(A)$ denote the domain and range of the linear operator in E, respectively. Let $KerA$ denote a null space of A.

A closed linear operator A is said to be $\varphi -$ sectorial (or sectorial for $\varphi = 0$) in a Banach space E with bound $M > 0$ if $Ker\, A = \{0\}, D(A)$ and $R(A)$ are dense on E, and $\|(A + \lambda I)^{-1}\|_{B(E)} \le M|\lambda|^{-1}$for all $\lambda \in S_\varphi, \varphi \in [0, \pi)$where I is an identity operator in E. Sometimes $A + \lambda I$ will be written as $A + \lambda$ and will be denoted by A_λ. It is known (see e.g. [17, §1.15.1]) that the fractional powers of the operator A are well defined.

$L_{p,\gamma}(\Omega; E)$ denote the space of strongly E −valued functions that are defined on $\Omega \subset R^n$ with the norm

$$\|f\|_{L_{p,\gamma}} = \|f\|_{L_{p,\gamma}(\Omega;E)} = \left(\int_\Omega \|f(x)\|_E^p \gamma(x) dx \right)^{1/p}, 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_{\infty,\gamma}(\Omega;E)} = \operatorname*{esssup}_{x\in\Omega} [\gamma(x)\|f(x)\|_E],$$

where, E be a Banach space and $\gamma = \gamma(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ be a positive measurable weighted function on a measurable subset Ω.

For $\gamma(x) \equiv 1$, the space $L_{p,\gamma}(\Omega, E)$ will be denoted by $L_p = L_p(\Omega; E)$.

The weight $\gamma = \gamma(x)$ satisfy anA_p condition; i.e., $\gamma(x) \in A_p, p \in (1, \infty)$ if there is a positive constant C such that

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \gamma(x)dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \gamma^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx \right)^{p-1} \leq C$$

for all cubes $Q \subset R^n$(see e.g [6, Ch.9]).

Here, $S = S(R^n; E)$ denotes E-valued Schwartz class i.e., the space of E-valued rapidly decreasing smooth functions on R^n, equipped with its usual topology generated by seminorms. $S(R^n; \mathbb{C})$ will be denoted by just S.

$S'(R^n; E)$ denote the space of all continuous linear operators, $L: S \to E$, equipped with the bounded convergence topology. Recall $S(R^n; E)$ is norm dense in $L_{p,\gamma}(R^n; E)$ when $1 < p < \infty, \gamma \in A_p$(see e.g. [2]).

$C(\Omega, E)$ and $C^{(m)}(\Omega; E)$ will denote the spaces of E −valued bounded uniformly strongly continuous and m −times continuously differentiable functions on Ω, respectively.

An E −valued generalized function$D^\alpha f$ is called a generalized derivative in the sense of Schwartz distributions of the function $f \in S(R^n, E)$ if

$$< D^\alpha f, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < f, D^\alpha \varphi >$$

holds for all $\varphi \in S$, where α=$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, α_i are integers.

Let F denote the Fourier transform. Throughout this section the Fourier transformation of a function f will be denoted by$\hat{f}$ and $F^{-1}f = \check{f}$. It is known that

$$F(D_x^\alpha f) = (i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n} \hat{f},\ D_\xi^\alpha (F(f)) = F[(-ix_1)^{\alpha_1} \dots (ix_n)^{\alpha_n} f]$$

for all $f \in S'(R^n; E)$.

Suppose E_1 and E_2 are two Banach spaces. A function $\Psi \in L_\infty\left(R^n; B(E_1, E_2)\right)$ is called a Fourier multiplier from $L_{p,\gamma}(R^n; E_1)$ to $L_{p,\gamma}(R^n; E_2)$ for $p \in (1, \infty)$ if the map $u \to Tu = F^{-1}\Psi(\xi)Fu, u \in S(R^n; E_1)$ is well defined and extends to a bounded linear operator

$$T: L_{p,\gamma}(R^n; E_1) \to L_{p,\gamma}(R^n; E_2).$$

A set $K \subset B(E_1, E_2)$ is called R −bounded (see [5], [18]) if there is a constant $C > 0$ such that for all $T_1, T_2, \dots, T_m \in K$ and $u_1, u_2, \dots, u_m \in E_1, m \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) T_j u_j \right\|_{E_2} dy \leq C \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) u_j \right\|_{E_1} dy,$$

where $\{r_j\}$ is a sequence of independent symmetric $\{-1; 1\}$ −valued random variables on [0,1]. The smallest C for which the above estimate holds is called the R −bound of K and denoted by $R(K)$.

A Banach space E is said to be a space satisfying the multiplier condition with respect toto weighted function γ and $p \in (1, \infty)$ (or multiplier condition with respect to $p \in (1, \infty)$ when $\gamma(x) \equiv 1$) if for any $\Psi \in C^{(n)}(R^n \backslash \{0\}; B(E))$ the R −boundedness of the set

$$|\xi|^\beta D_\xi^\beta \Psi(\xi): \xi \in R^n \backslash \{0\}, \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m), \beta_k \in \{0,1\}$$

implies that Ψ is a Fourier multiplier in $L_{p,\gamma}(R^n;E)$.

A sectorial operator $A(x), x \in R^n$ is said to be a uniformly R −sectorial in a Banach space E if there exists a $\varphi \in [0,\pi)$ such that

$$\sup_{x\in R^n} R\big(\{[A(x)(A(x)+\xi I)^{-1}]: \xi \in S_\varphi\}\big) \le M.$$

Note that, in Hilbert spaces every norm bounded set is R −bounded. Therefore, in Hilbert spaces all sectorial operators are R −sectorial.

Let $A = A(x)$, $x \in R^n$ be closed linear operator in E with domain $D(A)$ independent of x. The Fourier transformation of $A(x)$ is a linear operator with the domain $D(A)$ defined as

$$\hat{A}(\xi)u(\varphi) = A(x)u(\hat{\varphi}) \text{ for } u \in S'(R^n;D(A)), \varphi \in S(R^n).$$

(For details see e.g [2, Section 3]).

Let $h \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$ and $e_k, k = 1,2,\dots n$ be the standard unit vectors of R^n,

$$\Delta_k(h)f(x) = f(x+he_k) - f(x).$$

$A(x)$ is differentiable if there is the limit

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x_k}\right)u = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta_k(h)A(x)u}{h}, k = 1,2,\dots,n, u \in D(A)$$

in the sense of E-norm.

Let E_0 and E be two Banach spaces, where E_0 is continuously and densely embeds into E. Let l be a integer number. $W^l_{p,\gamma}(R^n;E_0,E)$ denotes the space of all functions from $S'(R^n;E_0)$ such that $u \in L_{p,\gamma}(R^n;E_0)$ and the generalized derivatives $D^l_k u = \frac{\partial^l u}{\partial x^l_k} \in L_{p,\gamma}(R^n;E)$ with the norm

$$\|u\|_{W^l_{p,\gamma}(R^n;E_0,E)} = \|u\|_{L_{p,\gamma}(R^n;E_0)} + \sum_{k=1}^{n}\left\|D^l_k u\right\|_{L_{p,\gamma}(R^n;E)} < \infty.$$

It is clear to see that

$$W^l_{p,\gamma}(R^n;E_0,E) = W^l_{p,\gamma}(R^n;E) \cap L_{p,\gamma}(R^n;E_0)$$

In a similar way as in [14] we obtain

Theorem A. Let the following conditions be satisfied:

(1) E is a Banach space satisfying the multiplier condition with respect to weighted function;

$$\gamma(x) = \prod_{k=1}^{n}|x_k|^\gamma, -\frac{1}{n} < \gamma < \frac{p-1}{n}, p \in (1,\infty);$$

(2) A is an R −sectorial operator in E with $0 \le \varphi < \pi$and $0 < h \le h_0 < \infty$ is a certain parameter;

(3) l is a positive integer and $\alpha = (\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ such that, $\varkappa = \frac{p|\alpha|+\nu+n}{pl} < 1, 0 \le \mu \le 1-\varkappa$.

Then, the embedding $D^\alpha W^l_{p,\gamma}(R^n;E(A),E) \subset C(R^n;E(A^{1-\varkappa-\mu}))$ is continuous and there exists a positive constant $C_\mu$such that the following uniform estimate holds for all $h \in (0,h_0]$

$$\|D^\alpha u\|_{C(R^n;E(A^{1-\varkappa-\mu}))} \le C_\mu\left[h^\mu\|u\|_{W^l_{p,\gamma}(R^n;E(A),E)} + h^{-(1-\mu)}\|u\|_{L_{p,\gamma}(R^n;E)}\right],$$

for all $u \in W^l_{p,\gamma}(R^n;E(A),E))$.

Theorem A implies that the differential operator $u \to D^\alpha u$ is bounded from $W^l_{p,\gamma}(R^n;E(A),E)$ into $C(R^n;E(A^{1-\varkappa-\mu}))$ for $0 \le \mu < 1-\varkappa$.

3. Convolution differential-operator equation

In this section we rely on the recent papers by [11] and [16], where the problem is studied extensively. Section 3 prepares for the proof of the main result of this paper. First we establish coercive estimate and apply them to study regularity of the problem (1.2).

Now, we are ready to present main results. In this section we consider the following CDOE

$$\sum_{|\alpha|\le l} a_\alpha * D^\alpha u + (A+\lambda) * u = f, \tag{3.1}$$

where, λ are parameter, a_α are complex-valued functions defined in (1.1) and A is a linear operator in a Banach space E.

We find sufficient conditions that guarantee the separability of the problem (3.1), and in each case the appropriate notion of coercive solution is defned.

Condition 3.1. Suppose the following are satisfied:

1) $L(\xi) = \sum_{|\alpha|\le l} \hat{a}_\alpha(\xi)(i\xi)^\alpha \in S_{\varphi_1}, \varphi_1 \in [0,\pi), \xi \in R^n$

$L(\xi) \ge C \sum_{k=1}^{n} \left|\hat{a}_{\alpha(l,k)}\right| |\xi_k|^l, \alpha(l,k) = (0,0,\dots,l,0,0,\dots,00), i.e., \alpha_i = 0\,, i \ne k, \alpha_k = l;$

2) $\hat{a}_\alpha \in C^{(n)}(R^n)$ and $|\xi|^{|\beta|}\left|D^\beta \hat{a}_\alpha(\xi)\right| \le C_1,, \beta_k \in \{0,1\}, 0 \le |\beta| \le n;$

3) For $0 \le |\beta| \le n, \xi, \xi_0 \in R^n \backslash \{0\}$,

$\left[D^\beta \hat{A}(\xi)\right]\hat{A}^{-1}(\xi_0) \in C\left(R^n; B(E)\right), |\xi|^{|\beta|}\left\|D^\beta \hat{A}(\xi)\right\|_{B(E)} \hat{A}^{-1}(\xi_0) \le C_2.$

Let

$X = L_{p,\gamma}(R^n; E), Y = W^l_{p,\gamma}(R^n; E(A), E), p \in (1,\infty).$

By using a smilar technique as in [10] and [16] we obtain the following.

Theorem 3.1. Assume that Condition 3.1 holds and E is a Banach space satisfying the weighted multiplier condition with respect to weighted function $\gamma \in A_p$ and $p \in (1,\infty)$. Let $\hat{A}$ be a uniformly R −sectorial in E with $\varphi \in [0,\pi), \lambda \in S_{\varphi_2}, 0 \le \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 < \pi$. Then, problem (3.1) has a unique solution u and the coercive uniform estimate holds

$$\sum_{|\alpha|\le l} |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \|a_\alpha * D^\alpha u\|_X + \|A * u\|_X + |\lambda|\|u\|_X \le c\|f\|_X, \tag{3.2}$$

for all $f \in X$, and $\lambda \in S_\varphi$.

Proof. By applying the Fourier transform to equation (3.1) we get the solution of (3.1) can be represented as

$$u(x) = F^{-1}\left[\hat{A}(\xi) + L(\xi) + \lambda\right]^{-1} \hat{f}(\xi) \tag{3.3}$$

There are positive constants C_1 and C_2 such that

$$C_1|\lambda|\|u\|_X \le \left\|F^{-1}\left[\lambda[\hat{A}(\xi) + L(\xi) + \lambda]^{-1}\hat{f}\right]\right\|_X \le C_2|\lambda|\|u\|_X,$$

$$C_1\|A * u\|_X \le \left\|F^{-1}\hat{A}(\xi)\left[[\hat{A}(\xi) + L(\xi) + \lambda]^{-1}\hat{f}\right]\right\|_X \le C_2\|A * u\|_X,$$

$$C_1 \sum_{|\alpha|\le l} |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \|a_\alpha * D^\alpha u\|_X \le \le \left\|F^{-1}\left[\sum_{|\alpha|\le l} |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \hat{a}_\alpha(\xi)(i\xi)^\alpha [\hat{A}(\xi) + L(\xi) + \lambda]^{-1}\hat{f}\right]\right\|_X \le C_2 \sum_{|\alpha|\le l} |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \|a_\alpha * D^\alpha u\|_X. \tag{3.4}$$

Then by definition of R −boundedness we obtain that operator-valued functions, arising in the solution of equation (3.1) are Fourier multipliers from X to X. Thus, from (3.3) and (3.4) we obtain

$$|\lambda|\|u\|_X \le C_0\|f\|_X, \|A*u\|_X \le C_1\|f\|_X,$$

$$\sum_{|\alpha|\le l} |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}}\|a_\alpha * D^\alpha u\|_X \le C_2\|f\|_{X,}$$

for all $f \in X$. Hence, we get the assertion.

Let $D(A(x)) = D(\hat{A}(\xi)), D(\hat{A}(\xi))$ is dense in E and does not depend on ξ; $A(x)$ is a uniformly R-sectorial in E. Moreover, there exist positive constants C_1, C_2 and $\xi_0 \in R^n$ such that

$$C_1\left\|\hat{A}(\xi_0)u\right\|_E \le \|A(x)u\|_E \le C_2\left\|\hat{A}(\xi_0)u\right\|_E, \tag{3.5}$$

for $u \in D(A), x \in R^n$.

Theorem 3.2. Assume that the all conditions of Theorem 3.1 and (3.5) are satisfied. Then for $f \in X$ and $\lambda \in S_\varphi$ problem (3.1) has a unique solution $u \in Y$ and the coercive uniform estimate holds

$$\sum_{|\alpha|\le l} |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}}\|D^\alpha u\|_X + \|Au\|_X \le C\|f\|_X \tag{3.6}$$

Proof. By applying the Fourier transform to equation (3.1) we get

$$u(x) = F^{-1}\left[\hat{A}(\xi) + L(\xi) + \lambda\right]^{-1}\hat{f}(\xi),$$

By using (3.5) we obtain

$$\left\|A(x)F^{-1}[\hat{A}(\xi) + L(\xi) + \lambda]^{-1}\hat{f}\right\|_X \le M\left\|\hat{A}(\xi_0)F^{-1}[\hat{A}(\xi) + L(\xi) + \lambda]^{-1}\hat{f}\right\|_X.$$

Hence, it is sufficient to show that the operator functions

$$\sum_{|\alpha|\le l} |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}}\xi^\alpha[\hat{A}(\xi) + L(\xi) + \lambda]^{-1}, \hat{A}(\xi_0)[\hat{A}(\xi) + L(\xi) + \lambda]^{-1}$$

are multipliers in X. Indeed, by the part (3) of Condition 3.1 and R −sectoriality of $\hat{A}$, these facts are obtained from proved by reasoning as in the proof of Theorem 3.1. Really, using the previous arguments, as in Theorem 3.1, we obtain the required estimate (3.6).

4. The quasilinear elliptic CDOE

Maximal L_p-regularity is important for linear and non-linear problems and has been studied extensively in the last years (see e.g., [1], [3], [16], [18]). Our first goal in this paper is to establish the maximal L_p-regularity properties of the linear CDOEs and apply them to regularity following quasilinear CDOE.

In this section we consider the nonlinear convolution equation

$$\sum_{|\alpha|\le l} a_\alpha * D^\alpha u + G(x, D^\sigma u)u = F(x, D^\sigma u) + f(x), x\epsilon R^n, \tag{4.1}$$

where, G and F are nonlinear operators in Banach space E, $a_\alpha = a_\alpha(x)$ are complex-valued functions, f is a given E −valued function and D^σ denote all differential operators such that $|\sigma| \le l-1$.

Let

$$X = L_{p,\gamma}(R^n; E), Y = W^l_{p,\gamma}(R^n; E(A), E), \gamma(x) = \prod_{k=1}^{n}|x_k|^\gamma, 0 < \gamma < \frac{p-1}{n}$$

$$E_\sigma = (E(A), E)_{\varkappa_0,p}, \varkappa_\sigma = \frac{p|\sigma| + \gamma + n}{pl}, E_0 = \prod_{|\sigma|\le l_0-1} E_\sigma, l_0 = \left[l - \frac{\gamma+n}{p}\right],$$

where $[s]$ the integer part of the real number s.

Remark 4.1. By using Theorem A we obtain that for $\varkappa_\sigma < 1$ the embedding $D^\sigma Y \in E_\sigma$ is continuous and by trace theorem in Sobolev-Lions space (see e.g., [17, § 1.8.3.] and [4])

$$\prod_{|\sigma|\le l_0-1} \|D^\sigma u\|_{C(R^n;E_\sigma)} = \prod_{|\sigma|\le l_0-1} \sup_{x\in R^n} \|D^\sigma u(x)\|_{E_\sigma} \le \|u\|_Y$$

for

$$u \in Y, U_\sigma = \{D^\sigma(\cdot)\}, |\sigma| \le l_0 - 1.$$

For $r > 0$ denote by

$O_r = \{v \in E_0, \|v\|_{E_0} \le r\}, 0 < r \le r_0$, the closed ball of radius r in E_0.

Let $A(x, 0)$ denote by $A(x)$. Consider the linear CDOE

$$\sum_{|\alpha|\le l} a_\alpha * D^\alpha u + A * u = Q\,(x) \tag{4.2}$$

From Theorem 3.1 we conclude that problem (4.2) has a unique solution $u \in Y$and the coercive estimate holds

$$\sum_{|\alpha|\le l} \|a_\alpha * D^\alpha u\|_X + \|A * u\|_X = M\|Q\|_X \tag{4.3}$$

for all $Q \in X, p \in (1, \infty)$.

Condition 4.1. Assume the following conditions are satisfied:

(1) E is a Banach space satisfying the multiplier condition with respect to weighted function $\gamma(x) = \prod_{k=1}^n |x_k|^\gamma$, $0 < \gamma < \frac{p-1}{n}$ and $p \in (1, \infty)$;

(2) $F: R^n \times E_0 \to E$ is a measurable function for each $v \in E_0$ and $F(x, v) \in X$. Moreover, for each $r > 0$ there exists the positive functions $g_k(\cdot) \in L_{p,\gamma}(R^n; E)$ such that for $v, w \in O_r$

$$\|F(x,v)\|_E \le g_1(x)\|v\|_{E_0}, \|F(x,v) - F(x,w)\|_E \le g_2(x)\|v - w\|_{E_0},$$

where

$$\|g_k\|_{L_{p,\gamma}(R^n)} < M^{-1}, k = 1,2;$$

(3) there exists $v \in E_0$, such that the operator $G(x, v)$ is R-positive in E uniformly with respect to $x \in R^n$; $G(x,v)G^{-1}(x_0,v) \in C(R^n; B(E))$, for $x_0 \in R^n, D(G(x,0)) = D(A), G(x,0)u = A * u$; operators $G(x, 0)$ and $A = A(x)$ are both sectorial in E uniformly with respect to $x \in R^n$;

(4) for each $r > 0$ there exists a positive constant $L(r)$ such that

$\|[G(x,v) - G(x,w)]\bar{u}\|_E \le L(r)\|v - w\|_{E_0}\|\bar{u}\|_{E(A)}$ for $x \in R^n$, $v, w \in O_r$ and $v \in D(G(x,v))$.

Remark 4.2. In particular, concrete examples for nonlinearities G and F can shown e.g., the power functions, the function $-m(u)\Delta_q u$, where Δ_q is the Laplacian on $L_q(\Omega)$ and $m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is locally Lipschitz continuous. Other examples pertaining G and F can be taken from [3, Remark 4.7].

Theorem 4. 1. Let the Condition 4.1 holds. Then, there exist a r with $0 < r \le r_0$ and $\delta > 0$ such that for each $f \in X$ with $\|f\|_X \le \delta$ there exists a unique solution $u \in Y$ of equation (4.1) with $\|u\|_Y \le r$.

Proof. We want to solve problem (4.1) locally by means of maximal regularity of the linear problem (4.2) via the contraction mapping theorem. Choose $0 < r \leq r_0$ such that

$$L(r)Mr + M\,\|g_1\|_{L_{p,\gamma}(R^{n_)}} < 1, 2L(r)Mr + M\,\|g_2\|_{L_{p,\gamma}(R^{n_)}} < 1. \tag{4.4}$$

Let $f \in X$ such that $\|f\|_X \leq \delta$, with $\delta < (r/2M)$. Consider the function

$$Q(x) = [G(x, \overline{U}_\sigma) - G(x,0)]\bar{u} + F(x, \overline{U}_\sigma) + f(x), \tag{4.5}$$

where

$$\overline{U}_\sigma = \{D^\sigma \bar{u}\}, |\sigma| \leq l_0 - 1, \bar{u} \in Y.$$

We claim that $Q \in X$ and $M\|Q\|_X \leq r$. In fact, since by Remark 4.1, $\bar{u} \in C(R^n; E_\sigma)$ one has

$$G(x, \bar{u}) - G(x,0) \in C(R^n; B(E(A), E)).$$

Thus, by (4) part of Condition 4.1

$$\|Q(x)\|_E \leq L(r)\|\bar{u}(x)\|_{E_\sigma}\|\bar{u}(x)\|_{E(A)} + g_1(x)\|\bar{u}(x)\|_{E_\sigma} + \|f(x)\|_E,$$

for $x \in R^n$. By using the Remark 4.1 we have

$$\|\bar{u}(x)\|_{E_0} < \|\bar{u}\|_Y \leq r. \tag{4.6}$$

Then, from (4.6), from the first inequality of (4.4) and in view of δ<(r/2M) it follows that

$$M\|Q\|_X \leq M\left[rL(r)\|\bar{u}\|_{L_{p,\gamma}(R^n;E(A))} + r\|g_1\|_{L_{p,\gamma}(R^n;E(A))} + \delta\right] \leq r\left[L(r)Mr + M\|g_1\|_{L_{p,\gamma}(R^n)}\right] + M\delta \leq r. \tag{4.7}$$

Define a map $\Phi\bar{u} = u$ on $B_r = \{\bar{u} \in Y, \|\bar{u}\|_Y \leq r\}$, where u is a solution (4.2) for the inhomogeneity $Q(x)$ defined by (4.5). We want to show that $\Phi(B_r) \subset B_r$ and that Φ is a contraction operator in Y. By (4.7), Φ maps the set B_r into itself. We show that Φ is a strict contraction. In fact, let $\bar{u}_1 = \Phi u_1$, $\bar{u}_2 = \Phi u_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2 \in B_r$. It is clear to see that $\bar{u}_1 - \bar{u}_2$ is a solution of the problem (4.2) for the inhomogeneity

$$Q = [G(x, \bar{u}_2) - G(x,0)](\bar{u}_1 - \bar{u}_2) - [G(x, \bar{u}_1) - G(x, \bar{u}_2)]\bar{u}_1 +$$
$$F(x, \bar{u}_1) - F(x, \bar{u}_2).$$

As before we estimate

$$\|\Phi\bar{u}_1 - \Phi\bar{u}_2\|_Y \leq M\|Q\|_X \leq\leq M\{rL(r)\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|_{L_{p,\gamma}(R^n;E(A))+} + L(r)\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|_Y\|\bar{u}_1\|_{L_{p,\gamma}(R^n;E(A))} +$$
$$+\|g_2\|_{L_{p,\gamma}(R^n)}\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|_Y\} \leq M(2rL(r) + \|g_2\|_{L_{p,\gamma}(R^n)}\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|_Y.$$

Hence, in view of the second inequality of (4.4), Φ is a strict contraction. Then, by virtue of Banach's fixed point theorem we obtain the assertion.

REFERENCES

1. R. Agarwal, D. O' Regan, V. B. Shakhmurov, Separable anisotropic differential operators in weighted abstract spaces and applications, J. Math. Anal. Appl. 338 (2008), 970-983.
2. H. Amann, Operator-valued Fourier multipliers, vector-valued Besov spaces, and applications, Math.Nachr. 186 (1997), 5-56.
3. W. Arendt, S. Bu, Tools for maximal regularity, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1 (2003), 317-336.
4. O. V. Besov, V. P. Ilin, S. M. Nikolskii, Integral representations of functions and embedding theorems, Moscow, 1975 (in Russian); English transl. V. H. Winston & Sons, Washington, D. C, 1979.
5. R. Denk, M. Hieber, J. Prüss, R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type, Mem. Amer. Math. Soc. 166 (2003), n.788.
6. L. Grafakos L., Modern Fourier analysis, volume 250 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, second edition, 2009.

7. V.S. Guliev To the theory of multipliers of Fourier integrals for functions with values in Banach spaces, Trudy Math. Inst. Steklov, V.214, 17 (1996), 164-181.
8. S. G. Krein, Linear differential equations in Banach space, American Mathematical Society, Providence, 1971.
9. V. Keyantuo, C. Lizama, Maximal regularity for a class of integro-differential equations with infinite delay in Banach spaces, Studia Math. 168 (2005), 25-50.
10. H. K. Musaev, V. B. Shakhmurov, Regularity properties of degenerate convolution-elliptic equations, Bound. Value Probl., 2016:50 (2016), 1-19.
11. H.K. Musaev, V.B. Shakhmurov, B-coercive convolution equations in weighted function spaces and applications.,Ukr. math. journ. V. 69, N.10, 2017, 1385-1405.
12. J. Prüss, Evolutionary integral equations and applications, Birkhaser, Basel, 1993.
13. V.B. Shakhmurov, Separable convolution-elliptic operator with parameters, Form. Math. 27(6) (2015), 2637-2660.
14. V.B. Shakhmurov, Embedding theorems and maximal regular differential operator equations in Banach-valued function spaces, J. Inequal. Appl. 4 (2005), 605-620.
15. V. B. Shakhmurov, R.V. Shahmurov, Sectorial operators with convolution term, Math. Inequal. Appl., V.13 (2), 2010, 387-404.
16. V.B. Shakhmurov, H.K. Musaev, Maximal regular convolution differential equations in weighted Besov spaces, Appl, Comput. Math. V.16, N.2, 2017, 190-200.
17. H. Triebel, Interpolation theory. Function spaces. Differential operators, North-Holland, Amsterdam, 1978.
18. L. Weis, Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p- regularity, Math. Ann. 319, (2001), 735-758.
19. S. Yakubov, Ya.Yakubov, Differential-operator equations. Ordinary and partial differential equations, Chapmen and Hall /CRC, Boca Raton, 2000.

2017. Volume 1, Number 2 *Pages 149-153*

UOT : 517.947

BİHARMONİK TƏNLİYİN HƏLLİNİN ÇEBIŞEV-LAQER ÇOXHƏDLİLƏRİ İLƏ YAXINLAŞDIRILMASI

ŞAHBAZOVA Q.L.

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin

Şamaxi filialı

adpu.dekanliq@bk.ru

XÜLASƏ

İşdə mücərrəd biharmonik tənlik üçün müsbət yarımoxda Dirixle məsələsinə baxılır. Bu məsələnin dəqiq həllinin ifadəsindən istifadə etməklə onun təribi həllləri tapılmışdır. Belə ki, əmsal operatorun sıfır nöqtəsində güclü kəsilməz yarımqrupun törədici operatoru olmasından istifadə edərək, Çebışev-Laqer çoxhədlilərinin köməyi ilə dəqiq həllə yığılan çoxhədlilər qurulmuşdur. Başlanğıc verilənlərin daxil olduğu sinifə görə bu çoxhədlilərin dəqiq həllə yığılma sürəti də göstərilmişdir.

Açar sözlər: Dirixle məsələsi, biharmonik tənlik, törədici operator, Çebışev-Laqer çoxhədliləri.

ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ БИГОРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МНОГОЧЛЕНАМИ ЧЕБЫШЕВА-ЛАГЕРРА

РЕЗЮМЕ

В работе рассмотрена задача *Дирихле для* bигармонического уравнения на положительной полуоси. Используя представление точного решения найдено приближенные решение. Точнее, учитывая что, коэффициенты уравнения является генератором сильно непрерывной полугруппу, с помошью многочленов Чебышева-*Лагерра* построена последовательность многочленов сходщейся к точному решению. Установлено скорость сходимости этих многочленов к точному решению в зависимости от начальных данных.

Ключевые слова: задача *Дирихле*, bигармоническое уравнение, генератор, многочлены Чебышева-*Лагерра*.

APPROXIMATION OF THE SOLUTION OF THE BIHARMONIC EQUATION WITH CHEBYSHEV-LAGERRA POLYNOMIALS

ABSTRAKT

In the paper is considered, the Dirichlet problem for the biharmonic equation on the positive semi-axis. By using the exact solution an approximate solution is found. More precisely, considering that, the coefficients of the equation is a generator of a strongly continuous semigroup a sequence of polynomials converging to an exact solution, with the help of Chebyshev-Laguerre polynomials, is constructed. Proved that the rate of convergence of these polynomials is set to an exact solution depending on the initial data.

Keywords: Dirichlet problem, biharmonic equation, generator, Chebyshev-Laguerre polynomials.

Aşağıdakı mücərrəd biharmonik tənliyə baxaq:

$$y^{(4)}(t) - 2A^2 y^{(2)}(t) + A^4 y(t) = 0,\ t \in (0,\infty) \tag{1}$$

burada A, H -Hilbert fəzasında hər yerdə sıx çoxluqda təyin olunmuş öz-özünə qoşma müsbət operatordur. $D(A)$ ilə onun təyin oblastını, E_λ ilə vahidin ayrılışını işarə edək. Tutaq ki,

$$U_c(A) = \left\{ f \in \bigcap_{k=0}^{\infty} D(A^k) \mid \forall \alpha > 0, \exists c > 0 : \left\| A^k f \right\| < c a^k k! \right\},$$

$$U(A) = \left\{ f \in \bigcap_{k=0}^{\infty} D(A^k) \mid \exists \alpha > 0, \exists c > 0 : \left\| A^k f \right\| < c a^k k! \right\},$$

işarə edilmişdir [5]

$\forall \alpha > 0$ üçün $e^{\alpha A}$ operatorunun $D(e^{\alpha A})$ təyin oblastında

$$(f,g)_a = \left(e^{\alpha A} f, e^{\alpha A} g\right)$$

skalyar hasilini təyin edək və alınan Hilbert fəzasını $H_{e,\alpha}$ kimi işarə edək. Məlumdur ki, [5] $U_c(A)$ və $U(A)$ fəzaları $H_{e,\alpha}$ fəzalarının uyğun olaraq proyektiv və induktiv limitləridir. Yəni,

$$U_c(A) = \lim_{\alpha\to\infty} prH_{e,\alpha},\ U(A) = \lim_{\alpha\to 0} indH_{e,\alpha}$$

$H_{e,\alpha}$ fəzalarına nəzərən qurulmuş neqativ normalı fəzanı $H_{e,-\alpha}$ ilə işarə edək. Onda $U'(A) = \lim_{\alpha\to 0} prH_{e,-\alpha}$ fəzası H fəzasındakı skalyar hasilə nəzərən $U(A)$ fəzasının qoşma fəzası olar.

(1) tənliyi üçün müsbət yarımoxda Dirixle məsələsi dedikdə bu tənliyinin $(0,\infty)$ aralığında

$$\lim_{t\to+0} y^{(j)}(t) = \varphi_j,\ (j=0,1) \tag{2}$$

şərtlərini ödəyən həlli başa düşülür, burada $\varphi_j \in U'(A)$ və bütün limitlər $U'(A)$ fəzasının topologiyası mənasında başa düşülür.

$$exp(-At) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dE_\lambda \tag{3}$$

bərabərliyi spektral ayrılış mənada başa düşülür.Belə ki,bu operator aşağıdakı bərabərsizliyi ödəyən f funksiyaları üçün təyin olunub:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} d(E_\lambda f, f) < \infty$$

Öz-özünə qoşma operatorların spektral nəzəriyyəsindən məlumdur ki, bu bərabərlik $f \in D(A^n)$, n $\in N$ olduqda (3) bərabərliyini n dəfə diferensiallamaq olar. Ona görə də, yoxlamaq olar ki,

$$y(t)=(E+tA)\,exp\ (-At)\,\varphi_0 + texp(-At)\varphi_1$$

vektor-funksiyası (1) tənliyinin istənilən $\varphi_0, \varphi_1 \in D(A^4)$ elementləri verildikdə (2) şərtlərini ödəyən həllidir. Məqsəd bu həllin

$L_2(0,\infty), \lambda^\alpha exp(-\mu\alpha))\quad (\alpha > -1, \mu > 0 - parametrdir)$ fəzasında tam sistem əmələ gətirən

$$L_{\mu,\alpha,n}(\lambda) = (-1)^n \mu^{\frac{1+\alpha}{2}} (\mu\lambda)^{-\alpha} exp(\mu\lambda)\left[(\mu\lambda)^{\alpha+n} exp(-\mu\lambda)\right]^{(n)} / (n!\,\Gamma(n+\alpha+1))^{\frac{1}{2-}}$$

Çebışev-Laqer çoxhədliləri vasitəsi ilə yaxınlaşdırılması məsələsini öyrənməkdir. Qeyd edək ki, analoji məsələlər ikinci tərtib diferensial tənliklər üçün [1,3]-də öyrənilmişdir.

Məlumdur ki, $exp(-\lambda t)$ funksiyasının Çebışev-Laqer çoxhədlilərinə görə Furye sırasının əmsalları aşağıdkı bərabərliklə təyin olunur:

$$P_{\mu,t,n}(\lambda) = \mu^{\frac{1}{2}} (t+\mu) \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{t}{t+\mu}\right)^k L_{\mu,0,k}(\lambda)$$

Sıfır nöqtəsində güclü kəsilməz yarımqrupların xassəsindən istifadə etməklə göstərmək olar ki, $y(t)$ həlli aşağıdakı ifadəyə malikdir:

$$y(t) = (T(t) - tAT(t))\phi_0 + tT(t)\phi_1,$$

burada $T(t) = e^{-At}$ yarımqrupu işarə edilmişdir.Həllin bu ifadəsindən istifadə edərək bircins biharmonik tənliyin həllinin Çebışev-Laqer çoxhədliləri ilə aproksimasiyası məsələsini öyrənək. Bu məqsədlə aşağıdakı lemmaları isbat edək.

Lemma1. Əgər f vektoru A operatorunun analitik funksiyalar sinifinə daxil olarsa, onda elə $c(t) > 0$, $\mu > 0$ ədədləri və $0 < \rho(t) < 1$ funksiyası var ki, aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur.

$$\left\| e^{-At} f - P_{\mu,t,n}(A)\, f \right\| \le c(t)\left[\rho(t)\right]^{n+1} \| f \|_{\mu_0}$$

İsbatı. Tutaq ki, $f \in U(A)$ Onda induktiv limitin tərifinə görə

$f \in \bigcup_{\mu>0} D(\exp \mu A)$ olar. Buradan alırıq ki, elə $\mu_0 > 0$ ədədi var ki, $f \in D(\exp \mu_0 A)$.

Həmin μ_0 ədədini qeyd edib öz-özünə qoşma operatorun spektral ayrılışından istifadə etməklə aşağıdakı bərabərliyi yza bilərik:

$$\left\| e^{-At} f - P_{\mu_0,t,n}^{(A)} f \right\|^2 = \int_0^\infty \left| e^{-\lambda t} - P_{\mu_{0,t,n}}(\lambda) \right|^2 d(E_\lambda f, f)$$

Bu bərabərsizliyin sağ tərəfi üçün qiymətləndirmə aparaq:

$$\int_0^\infty \left| e^{-\lambda t} - P_{\mu_{0,t,n}}(\lambda) \right|^2 d(E_\lambda f, f) = \int_0^\infty \left| e^{-\lambda t} - P_{\mu_{0,t,n}}(\lambda) \right|^2 \cdot e^{-2\mu_0\lambda} \cdot e^{2\mu_0\lambda} \cdot d(E_\lambda f, f) \le$$

$$\le \sup_{0<\lambda<\infty} \left[\left| e^{-\lambda t} - P_{\mu_0,t,n}(\lambda) \right|^2 \cdot e^{-2\mu_0\lambda} \right] \int_0^\infty e^{2\mu_0\lambda} d(E_\lambda f, f) = \operatorname*{Sup}_{0<\lambda<\infty} \left[\left| e^{-\lambda t} - P_{\mu_0,t,n}(\lambda) \right|^2 \cdot e^{-2\mu_0\lambda} \right] \cdot \| f \|_{\mu_0}^2$$

$e^{-\lambda t}$ funksiyası 6.4 teoreminin $[2]$ şərtini ödədiyi üçün $P_{\mu_0,t,n}(\lambda)$ çoxhədliləri λ parametrinin müsbət yarımoxa daxil olan hər bir qiymətində bu funksiyaya yığılar. Ona görə də, aşağıdakı qiymətləndirməni yaza bilərik:

$$\left| e^{-\lambda t} - P_{\mu_0,t,n}(\lambda) \right| e^{-\mu_0\lambda} \le \mu_0^{\frac{1}{2}} (\mu_0 + t)^{-1} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{t}{\mu_0 + t} \right)^k e^{-\mu_0\lambda} \cdot \left| L_{\mu_0,o,k}(\lambda) \right|$$

Aşağıdakı məlum $[1]$ bərabərsizlikdən

$$e^{-\mu_0\lambda} \left| L_{\mu_0 \atop o,k}(\lambda) \right| \le \mu_0^{\frac{1}{2}}$$

istifadə etsək, alarıq ki,

$$\left| e^{-\lambda t} - P_{\mu_0,t,n}(\lambda) \right| e^{-\mu_0\lambda} \le \mu_0 (\mu_0 + t)^{-1} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{t}{\mu_0 + t} \right)^k \le c(t) \frac{\mu_0}{\mu_0 + t} \left(\frac{t}{\mu_0 + t} \right)^{n+1} \le c(t) \cdot \left[\rho(t)\right]^{n+1} \quad \text{burada,}$$

$$\rho(t) = \frac{t}{\mu_0 + t} < 1,\ c(t) = \frac{\mu_0 + t}{\mu_0}$$

Beləliklə aşağıdakı münasibəti alırıq:

$$\left\|e^{-At}f - P_{\mu_0,t,n}(A)f\right\| \le \sup_{0<\lambda<\infty}\left[\left|e^{-\lambda t} - P_{\mu_0,t,n}(\lambda)\right|e^{-\mu_0\lambda}\right]\|f\|_{\mu_0} \le c(t)\left[\rho(t)\right]^{n+1}\|f\|_{\mu_0}$$

Bununla da, Lemma 1 isbat olundu. Analoji lemmanı $te^{-At}f$ vektor funksiyası üçün də isbat etmək olar.

Lemma 2.

Əgər $f \in U(A)$ olarsa, onda elə $s(t)>0$, $\mu>0$ və $0<\rho(t)<1$ var ki, aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\| tAe^{-At}f - tAP_{\mu,t,n}(A)f \| \le s(t)\left[\rho(t)\right]^{n+1}\|f\|_{\mu_0}$$

İsbatı. Qeyd edək ki, A qeyri-məhdud operator olduğuna görə bu, Lemma 1-dən birbaşa alınmır. Ona görə də, aşağıdakı kimi qiymətləndirmə üçün μ_0 parametrini Lemma 1-də olduğu kimi seçək:

$$\| tAe^{-At}f - tAP_{\mu_0,t,n}(A)f \|^2 = \int_0^\infty \left|t\lambda e^{-\lambda t} - t\lambda P_{\mu_0,t,n}(\lambda)\right|^2 d(E_\lambda f, f) =$$

$$= \int_0^\infty \left|t\lambda e^{-\lambda t} - t\lambda P_{\mu_0,t,n}(\lambda)\right|^2 e^{-2\mu_0\lambda}\cdot e^{2\mu_0,\lambda} d(E_\lambda f, f) =$$

$$= \int_0^\infty \left|e^{-\lambda t} - P_{\mu_0,t,n}(\lambda)\right|^2 \cdot t^2\lambda^2 e^{-2\mu_0\lambda}\cdot e^{2\mu_0,\lambda} d(E_\lambda f, f)$$

Kifayət qədər kiçik müsbət ε ədədi götürək və aşağıdakı bərabərliyi yazaq:

$$\| tAe^{-At}f - tAP_{\mu_o,t,n}(A)f \|^2 = \int_0^\infty \left|e^{-\lambda t} - P_{\mu_0,t,n}(\lambda)\right|^2 \cdot t^2(\lambda^2 e^{-2\varepsilon\lambda})\cdot e^{2(\varepsilon-\mu_0)\lambda}\cdot e^{2\mu_0\lambda} d(E_\lambda f, f)$$

Asanlıqla görmək olar ki, $\varepsilon \ge \mu_0$ olduqda $f \in D(e^{\mu_0 A})$ olar, $\varepsilon < \mu_0$ olarsa, onda $e^{2(\varepsilon-\mu_0)\lambda}$ funksiyası λ-nın funksiyası olaraq məhdud olar. Bunları nəzərə alıb aşağıdakı bərabərsizliyi yaza bilərik:

$$\| tAe^{-At}f - tAP_{\mu,t,n}(A)f \|^2 \le s(t)t \sup_{0<\lambda<\infty}\left|e^{-\lambda t} - P_{\mu_0,t,n}(\lambda)\right|\cdot \| f \|_{\mu_0}$$

Buradan alırıq (lemma 1-ə analoji olaraq) ki, $\| tAe^{-At}f - tAP_{\mu_0,t,n}(A)f \| \le s(t)\left(\frac{t}{\mu_0+t}\right)^{n+1}\|f\|_{\mu_0}$

burada $\rho(t) = \frac{t}{\mu_0+t}$ işarə etsək lemmanı isbat etmiş olarıq.

Teorem. Əgər φ_0 və φ_1 A operatorunun analitik funksiyalar çoxluğuna daxil olarsa, onda elə M(t)>0, $\mu>0$ və $0<\rho(t)<1$ funksiyası var ki, aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\| y(t) - P_{\mu,t,n}(A)\phi_0 - tP_{\mu,t,n}(A)\phi_1 - AtP_{\mu,t,n}(A)\phi_0 \| \le \mathrm{M}(t)\left[\rho(t)\right]^{n+1}$$

İsbatı. $y(t) = e^{-At}\varphi_0 + te^{-At}\varphi_1 - tAe^{-At}\varphi$

Ona görə də,

$$\| y(t) - P_{\mu,t,n}(A)\varphi_0 - tP_{\mu,t,n}(A)\varphi_1 - tAP_{\mu,t,n}(A)\varphi_0 \| \leq$$

$$\leq \| y^{-At}\varphi_0 - P_{\mu,t,n}(A)\varphi_0 \| + \| te^{-At}\varphi_1 - tP_{\mu,t,n}(A)\varphi_1 \| + \| tAe^{-At}\varphi_0 - tAP_{\mu,t,n}(A)\varphi_0 \|$$

bərabərsizliyini yaza bilərik.

Bərabərsizliyin sağ tərəfindəki hər bir toplanana uyğun olaraq Lemma 1 və Lemma 2-ni tətbiq etsək aşağıdakı bərabərsizliyi yaza bilərik:

$$\| y(t) - P_{\mu,t,n}(A)\phi_0 - tP_{\mu,t,n}(A)\phi_1 - tAP_{\mu,t,n}(A)\phi_0 \| = \| (T(t) - tAT(t))\phi_0 + tT(t)\phi_1 -$$

$$-P_{\mu,t,n}(A)\phi_0 - tP_{\mu,t,n}(A)\phi_1 - tAP_{\mu,t,n}(A)\phi_0 \| \leq cM(t)\left[\rho(t)\right]^{n+1}$$

burada $\rho(t) = \dfrac{t}{\mu_0, +t}$,c=max$\{\| \phi_0 \|, \| \phi_1 \|\}$

Göründüyü kimi $t > 0$ olduqda $o < \rho(t) < 1$

Bu teoremdən görünür ki, φ_0 və φ_1 verilənləri A operatorunun analitik funksiyaları sinifinə daxil olduqda Dirixle məsələsinin həllinə Çebışev-Lager çoxhədliləri vasitəsi ilə qurulmuş çoxhədlinin yığılması nöqtəvidir,hər sonlu parçada isə müntəzəmdir.

Qeyd edək ki, isbat etdiyimiz teoremdən görünür ki, əgər $0 < t < T$ aralığında baxsaq, yığılma sürəti $\left(\dfrac{T}{\mu_0 + T}\right)^{n+1}$-ə bərabər olar.

ƏDƏBİYYAT

1. В.В.Городецкий,М.Л. , Горбачук. О полиномиальном приближении решений дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве.УМЖ, т.36, №4, с.500-504.
2. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены.- М.Наука, 1979, 416с.
3. Бабин А.В.Представление решений дифференциальных уравнений в полиномиальной форме. – Успехи мат.наук,1983, 38, №2, 228-229.
4. Дж.Голдстейн. Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев, “Выща школа”, 1989, 347с.
5. Горбачук В.И, Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.- Киев: Наук.думка, 1984, 282с.
6. Хилле Э, Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы.Из-во ИЛ, Москва, 1963, 829с.

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

1. "The Baku Engineering University Mathematics and Computer Science" accepts original unpublished articles and reviews in the research field of the author.
2. Articles are accepted in English.
3. File format should be compatible with **Microsoft Word** and must be sent to the electronic mail (**journal@beu.edu.az**) of the Journal. The submitted article should follow the following format:

- Article title, author's name and surname
- The name of workplace
- Mail address
- Abstract and key words

4. The title of the article should be in each of the three languages of the abstract and should be centred on the page and in bold capitals before each summary.
5. **The abstract** should be written in **9 point** type size, between **100** and **150** words. The abstract should be written in the language of the text and in two more languages given above. The abstracts of the article written in each of the three languages should correspond to one another. The keywords should be written in two more languages besides the language of the article and should be at least three words.
6. .**UDC** and **PACS** index should be used in the article.
7. The article must consist of the followings:

- Introduction
- Research method and research
- Discussion of research method and its results
- In case the reference is in Russian it must be given in the Latin alphabet with the original language shown in brackets.

8. **Figures, pictures, graphics and tables** must be of publishing quality and inside the text. Figures, pictures and graphics should be captioned underneath, tables should be captioned above.
9. **References** should be given in square brackets in the text and listed according to the order inside the text at the end of the article. In order to cite the same reference twice or more, the appropriate pages should be given while keeping the numerical order. For example: [7, p.15].

Information about each of the given references should be full, clear and accurate. The bibliographic description of the reference should be cited according to its type (monograph, textbook, scientific research paper and etc.) While citing to scientific research articles, materials of symposiums, conferences and other popular scientific events, the name of the article, lecture or paper should be given.

Samples:

a) ***Article:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure af monomerrik and dimeric conapeetes of carnosine üith zinc,* Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Book:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles.* Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002

c) ***Conference paper:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information – Commu-nication Technologies in Science and education. II International Conference."*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*

References should be in 9-point type size.

10. The margins sizes of the page: - Top 2.8 cm. bottom 2.8 cm. left 2.5 cm, right 2.5 cm. The article main text should be written in Palatino Linotype 11 point type size single-spaced. Paragraph spacing should be 6 point.
11. The maximum number of pages for an article should not exceed 15 pages
12. The decision to publish a given article is made through the following procedures:

- The article is sent to at least to experts.
- The article is sent back to the author to make amendments upon the recommendations of referees.
- After author makes amendments upon the recommendations of referees the article can be sent for the publication by the Editorial Board of the journal.

YAZI VƏ NƏŞR QAYDALARI

1. "Journal of Baku Engineering University- Riyaziyyat və kompüter elmləri" - əvvəllər nəşr olunmamış orijinal əsərləri və müəllifin tədqiqat sahəsi üzrə yazılmış icmal məqalələri qəbul edir.
2. Məqalələr İngilis dilində qəbul edilir.
3. Yazılar **Microsoft Word** yazı proqramında, (**journal@beu.edu.az**) ünvanına göndərilməlidir. Göndərilən məqalələrdə aşağıdakılara nəzərə alınmalıdır:

- Məqalənin başlığı, müəllifin adı, soyadı,
- İş yeri,
- Elektron ünvanı,
- Xülasə və açar sözlər.

4. **Məqalədə başlıq hər xülasədən əvvəl** ortada, qara və böyük hərflə xülasələrin yazıldığı hər üç dildə olmalıdır.
5. **Xülasə** 100-150 söz aralığında olmaqla, 9 punto yazı tipi böyüklüyündə, məqalənin yazıldığı dildə və bundan əlavə yuxarıda göstərilən iki dildə olmalıdır. Məqalənin hər üç dildə yazılmış xülasəsi bir-birinin eyni olmalıdır. Açar sözlər uyğun xülasələrin sonunda onun yazıldığı dildə verilməklə ən azı üç sözdən ibarət olmalıdır.
6. Məqalədə UOT və PACS kodları göstərilməlidir.
7. Məqalə aşağıdakılardan ibarət olmalıdır:

- Giriş,
- Tədqiqat metodu
- Tədqiqat işinin müzakirəsi və onun nəticələri,
- İstinad ədəbiyyatı rus dilində olduğu halda orjinal dili mötərzə içərisində göstərməklə yalnız Latın əlifbası ilə verilməlidir.

8. **Şəkil**, **rəsm**, **grafik** və **cədvəllər** çapda düzgün, aydın çıxacaq vəziyyətdə və mətn içərisində olmalıdır. Şəkil, rəsm və grafiklərin yazıları onların altında yazılmalıdır. Cədvəllərdə başlıq cədvəlin üstündə yazılmalıdır.
9. **Mənbələr** mətn içərisində kvadrat mötərizə daxilində göstərilməklə məqalənin sonunda mətn daxilindəki sıra ilə düzülməlidir. Eyni mənbəyə iki və daha cox istinad edildikdə əvvəlki sıra sayı saxlanmaqla müvafiq səhifələr göstərilməlidir. Məsələn: [7,səh.15].

Ədəbiyyat siyahısında verilən hər bir istinad haqqında məlumat tam və dəqiq olmalıdır. İstinad olunan mənbənin biblioqrafik təsviri onun növündən (monoqrafiya, dərslik, elmi məqalə və s.) asılı olaraq verilməlidir. Elmi məqalələrə, simpozium, konfrans, və digər nüfuzlu elmi tədbirlərin materiallarına və ya tezislərinə istinad edərkən məqalənin, məruzənin və ya tezisin adı göstərilməlidir.

Nümunələr:

a) ***Məqalə:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure af monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc,* Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Kitab:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, 2002

c) ***Konfrans:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*

Mənbələr 9 punto yazı tipi böyüklüyündə olmalıdır.

10. **Səhifə ölçüləri:** üstdən 2.8 sm, altdan 2.8 sm, soldan 2.5 sm və sağdan 2.5 sm olmalıdır. Mətn 11 punto yazı tipi böyüklüyündə, **Palatino Linotype** yazı tipi ilə və tək simvol aralığında yazılmalıdır. Paraqraflar arasında 6 punto yazı tipi aralığında məsafə olmalıdır.
11. Orijinal tədqiqat əsərlərinin tam mətni bir qayda olaraq 15 səhifədən artıq olmamalıdır.
12. Məqalənin nəşrə təqdimi aşağıdakı qaydada aparılır:

- Hər məqallə ən azı iki ekspertə göndərilir.
- Ekspertlərin tövsiyələrini nəzərə almaq üçün məqalə müəllifə göndərilir.
- Məqalə, ekspertlərin tənqidi qeydləri müəllif tərəfindən nəzərə alındıqdan sonra Jurnalın Redaksiya Heyəti tərəfindən çapa təqdim oluna bilər.

YAZIM KURALLARI

1. "Journal of Baku Engineering University- Matematik ve Bilgisayar Bilimleri" önceler yayımlanmamış orijinal çalışmaları ve yazarın kendi araştırma alanın-da yazılmış derleme makaleleri kabul etmektedir.
2. Makaleler İngilizce kabul edilir.
3. Makaleler Microsoft Word yazı programında, (**journal@beu.edu.az**) adresine gönderilmelidir. Gönderilen makalelerde şunlar dikkate alınmalıdır:

- Makalenin başlığı, yazarın adı, soyadı,
- İş yeri,
- E-posta adresi,
- Özet ve anahtar kelimeler.

4. **Özet** 100-150 kelime arasında olup 9 font büyüklüğünde, makalenin yazıldığı dilde ve yukarıda belirtilen iki dilde olmalıdır. Makalenin her üç dilde yazılmış özeti birbirinin aynı olmalıdır. Anahtar kelimeler uygun özetin sonunda onun yazıldığı dilde verilmekle en az üç sözcükten oluşmalıdır.
5. Makalede UOT ve PACS tipli kodlar gösterilmelidir.
6. Makale şunlardan oluşmalıdır:

- Giriş,
- Araştırma yöntemi
- Araştırma
- Tartışma ve sonuçlar,
- İstinat Edebiyatı Rusça olduğu halde orjinal dili parantez içerisinde göstermekle yalnız Latin alfabesi ile verilmelidir.

7. **Şekil, Resim, Grafik** ve **Tablolar** baskıda düzgün çıkacak nitelikte ve metin içerisinde olmalıdır. Şekil, Resim ve grafiklerin yazıları onların alt kısımda yer almalıdır. Tablolarda ise başlık, tablonun üst kısmında bulunmalıdır.
8. **Kullanılan kaynaklar**, metin dâhilinde köşeli parantez içerisinde numaralandırılmalı, aynı sırayla metin sonunda gösterilmelidir. Aynı kaynaklara tekrar başvurulduğunda sıra muhafaza edilmelidir. Örneğin: [7,seh.15].

Referans verilen her bir kaynağın künyesi tam ve kesin olmalıdır. Referans gösterilen kaynağın türü de eserin türüne (monografi, derslik, ilmî makale vs.) uygun olarak verilmelidir. İlmi makalelere, sempozyum, ve konferanslara müracaat ederken makalenin, bildirinin veya bildiri özetlerinin adı da gösterilmelidir.

Örnekler:

a) ***Makale:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and Electronic Structure of Monomerik and Dimeric Conapeetes of Carnosine Üith Zinc,* Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Kitap:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002

c) ***Kongre:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*

Kaynakların büyüklüğü 9 punto olmalıdır.

9. **Sayfa ölçüleri**; üst: 2.8 cm, alt: 2.8 cm, sol: 2.5 cm, sağ: 2.5 cm şeklinde olmalıdır. Metin 11 punto büyüklükte **Palatino Linotype** fontu ile ve tek aralıkta yazılmalıdır. Paragraflar arasında 6 puntoluk yazı mesafesinde olmalıdır.
10. Orijinal araştırma eserlerinin tam metni 15 sayfadan fazla olmamalıdır.
11. Makaleler dergi editör kurulunun kararı ile yayımlanır. Editörler makaleyi düzeltme için yazara geri gönderilebilir.
12. Makalenin yayına sunuşu aşağıdaki şekilde yapılır:

- Her makale en az iki uzmana gönderilir.
- Uzmanların tavsiyelerini dikkate almak için makale yazara gönderilir.
- Makale, uzmanların eleştirel notları yazar tarafından dikkate alındıktan sonra Derginin Yayın Kurulu tarafından yayına sunulabilir.

13. Azerbaycan dışından gönderilen ve yayımlanacak olan makaleler için,(derginin kendilerine gonderilmesi zamani posta karşılığı) 30 ABD Doları veya karşılığı TL, T.C. Ziraat Bankası/Üsküdar-İstanbul 0403 0050 5917 No'lu hesaba yatırılmalı ve makbuzu üniversitemize fakslanmalıdır.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. «Journal of Baku Engineering University» - Математики и информатики публикует оригинальные, научные статьи из области исследования автора и ранее не опубликованные.
2. Статьи принимаются на английском языке.
3. Рукописи должны быть набраны согласно программы **Microsoft Word** и отправлены на электронный адрес **(journal@beu.edu.az)**. Отправляемые статьи должны учитывать следующие правила:

- Название статьи, имя и фамилия авторов
- Место работы
- Электронный адрес
- Аннотация и ключевые слова

4. **Заглавие статьи** пишется для каждой аннотации заглавными буквами, жирными буквами и располагается по центру. Заглавие и аннотации должны быть представлены на трех языках.
5. **Аннотация**, написанная на языке представленной статьи, должна содержать 100-150 слов, набранных шрифтом 9 punto. Кроме того, представляются аннотации на двух других выше указанных языках, перевод которых соответствует содержанию оригинала. Ключевые слова должны быть представлены после каждой аннотации на его языке и содержать не менее 3-х слов.
6. В статье должны быть указаны коды UOT и PACS.
7. Представленные статьи должны содержать:

- Введение
- Метод исследования
- Обсуждение результатов исследования и выводов.
- Если ссылаются на работу на русском языке, тогда оригинальный язык указывается в скобках, а ссылка дается только на латинском алфавите.

8. **Рисунки, картинки, графики и таблицы** должны быть четко выполнены и размещены внутри статьи. Подписи к рисункам размещаются под рисунком, картинкой или графиком. Название таблицы пишется над таблицей.
9. **Ссылки** на источники даются в тексте цифрой в квадратных скобках и располагаются в конце статьи в порядке цитирования в тексте. Если на один и тот же источник ссылаются два и более раз, необходимо указать соответствующую страницу, сохраняя порядковый номер цитирования. Например: [7, стр.15]. Библиографическое описание ссылаемой литературы должно быть проведено с учетом типа источника (монография, учебник, научная статья и др.). При ссылке на научную статью, материалы симпозиума, конференции или других значимых научных мероприятий должны быть указаны название статьи, доклада или тезиса.

Например:

a) ***Статья:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva I.N., Godjayev N.M. *Spatial and electronic structure of monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc,* Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Книга:*** Christie on Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles.* Fourth Edition, Prentice Hall, 2002

c) ***Конференция:*** Sadychov F.S, Fydin C,Ahmedov A.I. Appligation of Information-Communication Nechnologies in Science and education. II International Conference. *"Higher Twist Effects In Photon-Proton Collision",* Bakı,01-03 Noyabr, 2007, ss.384-391

Список цитированной литературы набирается шрифтом 9 punto.

10. **Размеры страницы:** сверху 2.8 см, снизу 2.8 см, слева 2.5 и справа 2.5. Текст печатается шрифтом **Palatino Linotype**, размер шрифта 11 punto, интервал-одинарный. Параграфы должны быть разделены расстоянием, соответствующим интервалу 6 punto.
11. Полный объем оригинальной статьи, как правило, не должен превышать 15 страниц.
12. Представление статьи к печати производится в ниже указанном порядке:

- Каждая статья посылается не менее двум экспертам.
- Статья посылается автору для учета замечаний экспертов.
- Статья, после того, как автор учел замечания экспертов, редакционной коллегией журнала может быть рекомендована к печати.